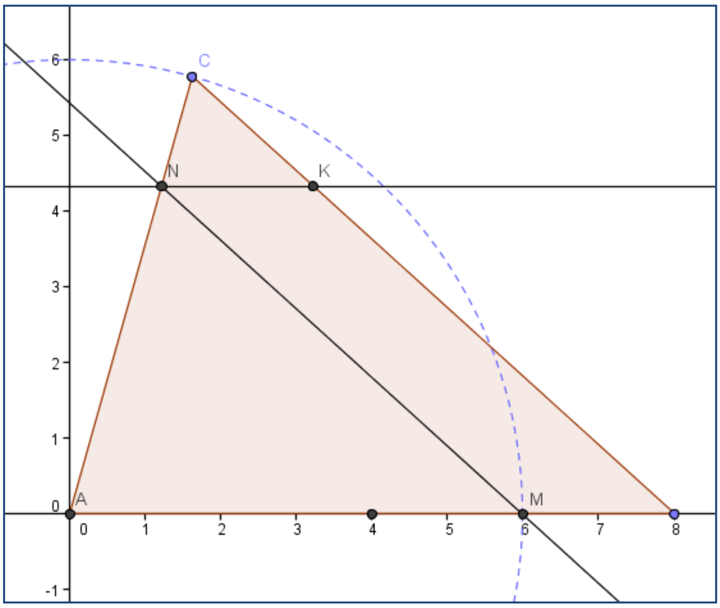
Le théorème de Thalès

Des exos en vrac Corrigé

Exercice 1 : *ABC est un triangle tel que AB mesure 6 cm et AC 5 cm. Un point M est marqué sur [AB] à 2 cm de A. La parallèle à (BC) qui passe par M coupe (AC) en N. Préciser la position de N.*

D'après les données : AM/AB=2/6=1/3. M est au premier tiers du segment [AB] à partir de A. Il en ira de même de N vis à vis de A sur le segment [AC].



Exercice 2 : *Dans un triangle ABC, [AB] mesure 8 cm et [AC] 6 cm. Une parallèle à (BC) recoupe [AB] en M et [AC] en N. Le segment [MB] mesure le quart du segment [AB]. La parallèle à (AB) passant par le point N recoupe (BC) en un point K.*

a) Tracer la figure. La mesure du segment [BC] ne revêt pas d'importance. Réponse ci-contre via GéoGébra.

b) *calculer [AN] et [NC].*

AN est à AC comme AM à AB ; c'est donc les ¾ de AC, soit 4,5 cm. Donc [NC] mesure 1,5 cm. NC est donc le tiers de AN (de même que BM vis à vis de AM).

c) *quelle relation entre KC et BC ?*

Donc KC est le tiers de KB, car le parallélisme transporte les proportions (c'est une conséquence du Théorème de Thalès).

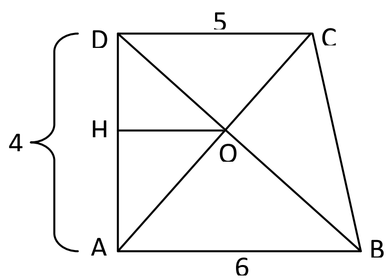
Exercice 3 : *On considère deux cercles (C) et (C') de même centre Ω. On trace une première demi-droite [OΔ) ; elle coupe (C) et (C') respectivement en A et A'. On trace une seconde demi-droite [Oδ) ; elle coupe (C) et (C') respectivement en b et b'. Que peut-on dire des droites (Ab) et (A'b') ?*

Les deux droites sont parallèles.

Exercice 4 : *On veut mesurer la hauteur d'un arbre d'extrémités A (pour azur) et S (pour sol). On accepte que l'arbre soit vertical et le sol horizontal. On a pris du recul et planté en B un bâton PB. On a encore un peu reculé pour aligner d'une part le haut du bâton et le haut de l'arbre . On appelle V cette position de visée. Préciser la hauteur de l'arbre sachant que VB = 5 m, BS = 6 x VB, PB = 2 m.*

Il suffit de calculer une succession de rapports : AS/PB = SV/BV ⇒AS = 2 ×11 / 5 = 4,4 m.

Exercice 5 : *On se donne un trapèze ABCD rectangle en A et D. Les bases [AB] et [CD] mesurent respectivement 6 cm et 5 cm. La hauteur du trapèze [AD] mesure 4 cm. Les diagonales se coupent en un point O. H désigne le projeté orthogonal de O sur la hauteur [AD]. Calculer OH, AH, HD.*



On applique le théorème de Thalès dans le triangle ADC :

HO/DC = AH/AD ⇒ HO = (5/4)×AH ;

On applique le théorème de Thalès dans le triangle ADB :

HO/AB = DH/AD ⇒ HO = (6/4)×DH ;

On en déduit : 5×AH = 6×DH ; mais : AH + DH = 4 ⇒ 5×AH + 5×DH = 20 ⇒ 11×DH = 20.

Donc : DH = 20/11 (environ 1, 82 cm) AH = 24/11 (environ 2,18 cm) et OH = 30/11 (environ 2,73 cm).

Exercice 6 : *On considère un quadrant défini par les demi-droites [RA) et [RQ) (ces demi-droites forment donc un angle droit). On considère que RQ mesure 13 cm, RA 21 cm. On choisit E sur [RQ) et T sur [RA) tous deux à 8 cm de R. Enfin U est choisi pour faire de REUT un parallélogramme.*

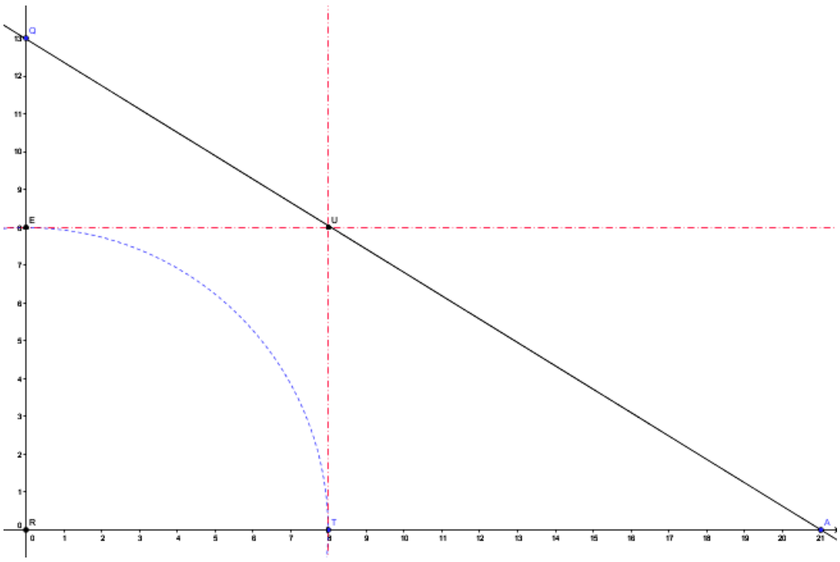
a) *Construire cette figure.* Voir réponse à l'échelle ½ page suivante.

b) *Quelle conjecture peut-on émettre relativement aux points Q, U, A ?*

A vue, les trois points Q, U, A semblent alignés.

c) *Comparer l'aire du triangle QRA et la somme des aires des triangles QEU et TUA ainsi que du quadrilatère REUT. Cette comparaison infirme-t-elle ou corrobore-t-elle la conjecture émise en b) ?*

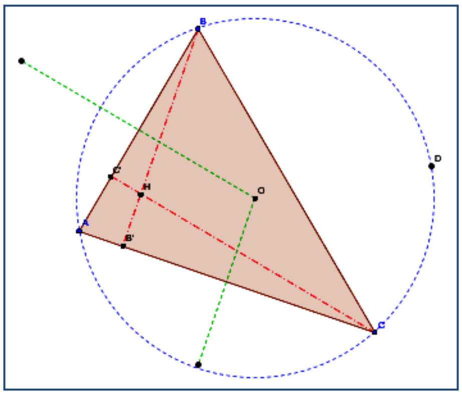
Aire (QRA) = 13 × 21 / 2 ; Aire (QEU) = 5 × 8 / 2 = 20 ; Aire (TUA) = 8 × 13 / 2 = 52 ; Aire (REUT) = 64. La somme des trois dernières aires vaut 136 cm^2 tandis que celle du triangle QRA vaut 136,5 cm^2. Le point U est donc à l'intérieur du rectangle QRA : les points Q, U, A ne sont pas alignés.



d) *Vérifier rapidement cette conjecture*.
Si les points étaient alignés, on pourrait appliquer le théorème de Thalès dans le triangle AQR, du fait de la droite (EU) parallèle à la base (RA). Or les rapports QE/QR (= 5/13) et EU/RA (=8/21) ne sont pas égaux, ce qui suffit à annihiler l'hypothèse première.

Exercice 7 : *ABC est un triangle quelconque. (C) désigne son cercle circonscrit, de centre O. On appelle D le point diamétralement opposé au point A. Enfin on appelle H l'orthocentre du triangle ABC.*

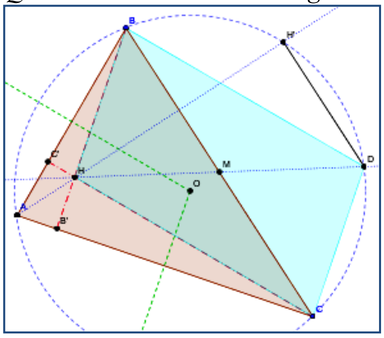
1) *Construire une figure compatible avec ces données. On pourra faire apparaître les hauteurs [BB'] et [CC'].*
Une esquisse de réponse (réalisée avec GéoGébra) est fournie ci-contre :



2) *Montrer que la droite (DC) est perpendiculaire à la droite (AC). Que peut-on énoncer quant aux droites (BB') et (DC) ?*
Le triangle ADC est inscrit dans un demi-cercle (de diamètre [AD]), par définition même du point D. Donc ce triangle est rectangle : les droites (AC) et (DC) sont perpendiculaires. La droite (BB') est perpendiculaire à la droite (AC) puisqu'il s'agit de la hauteur issue de B. Elle est donc parallèle à la droite (DC).

3) *Démontrer que le quadrilatère BHCD est un parallélogramme.*
Comme précédemment, le triangle ABD est inscriptible dans un demi-cercle donc est rectangle (en B). Les droites (BD) et (CC') sont toutes deux perpendiculaires à la droite (AB), donc parallèle. Dans le quadrilatère BHCD, les deux cotés [BA] et [HC] sont donc parallèles. D'après la question précédente, il en va de même des cotés [BH] et [DC]. Le quadrilatère BHCD est donc un parallélogramme.

4) *On appelle M le point d'intersection des droites (HD) et (BC) et H' le point d'intersection du cercle (C) et de la hauteur (AH). Quelle est la nature du triangle HH'M ? En déduire que M est le centre du cercle circonscrit au triangle HH'D.*



{Une nouvelle figure a été produite pour tenir compte des données nouvelles.}
Le triangle ADH', inscriptible dans un demi-cercle par construction, est rectangle en H'. Les droites (DH') et (BC) sont donc parallèles. Or le point M est milieu du segment [DH], puisque intersection des diagonales du parallélogramme BMCD. On peut donc appliquer le théorème de la droite des milieux dans le triangle HDH', relativement à la droite (BC) : parallèle à la base [DH'] et passant par le milieu M du coté HD, elle recoupe donc le troisième coté (HH') en son milieu. La droite (BC) est ainsi la perpendiculaire au segment [HH'] en son milieu : il s'agit de la médiatrice du segment [HH']. On peut maintenant conclure : M est à égale distance des points H et H' ; le triangle HH'M est isocèle en M. Il est évident que les segments [HM] et [MD] sont égaux. M est donc équidistant des points H , H' et D : c'est le centre du cercle circonscrit au triangle HH'D. (On aurait pu énoncé ce résultat plus rapidement).

5) *Démontrer que H' est le symétrique de H par rapport à la droite (BC).*
Conséquence immédiate de la question précédente puisque (BC) est médiatrice de [HH'].

6) *Que peut-on dire des symétriques de H par rapport aux droites (AB) et (AC) ?*
Le symétrique de H par rapport à la droite (BC) n'est rien que le point H'. Ce point appartient au cercle circonscrit au triangle ABC. Il en ira donc de même du symétrique de H par rapport à la droite (AC) -soit H''- et du symétrique de H par rapport à la droite (AB) soit H'''. Tous ces points, H' H'' H''', sont cocycliques avec A, B, C.

7) *Quelle propriété relative à l'orthocentre d'un triangle avez-vous démontré ?*
On peut énoncer : Les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport à ses trois côtés sont situés sur le cercle circonscrit au triangle.

Les exercices suivant demandent de mobiliser indifféremment le théorème de Pythagore ou le théorème de Thales.

Exercice 8 : *Pour chacune des figures, déterminer la longueur demandée (Les figures ne sont pas tracées à l'échelle, toutes les mesures sont exprimées dans la même unité). (Pris dans Charnay-Mante).*

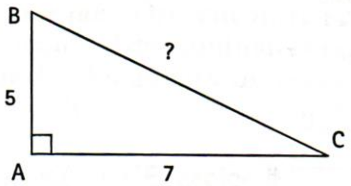


Fig. 1 (BC = ?)

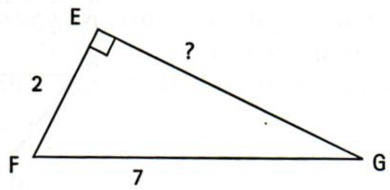


Fig. 2 (EG = ?)

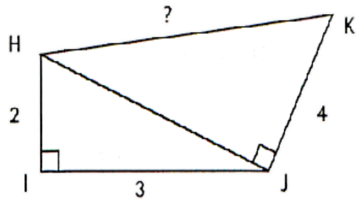


Fig. 3 (HK = ?)

On applique le théorème de Pythagore une ou deux fois. $BC^2 = 5^2 + 7^2 = 74 \Rightarrow BC = \sqrt{74}$ (environ 8,6) ; $EG^2 = 7^2 - 2^2 = 45$ d'où $EG = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ (environ 6.7) ; $HK^2 = 4^2 + 2^2 + 3^2 = 29 \Rightarrow HK = \sqrt{29}$ (environ 5,38).

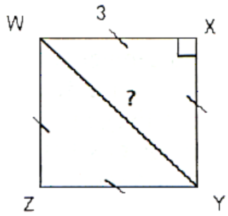


Fig. 4 (WY = ?)

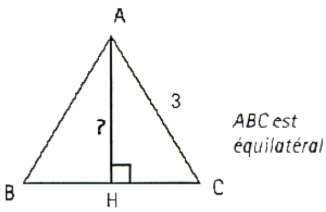


Fig. 5 (AH = ?)

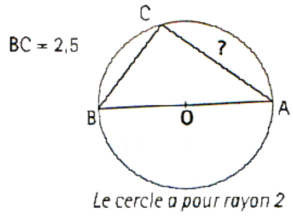


Fig. 6 (AC = ?)

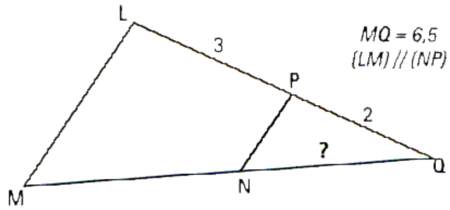


Fig. 7 (QN = ?)

Questions de cours déguisées : $WY = 3\sqrt{2}$; $AH = 3/2 \times \sqrt{2}$; $AC^2 = 4^2 - (2,5)^2 \Rightarrow AC = \sqrt{9,75}$ (environ 3,12).
$NQ/MQ = 2/5 \Rightarrow NQ\ 2/5 \times 6,5 = 2,6$.

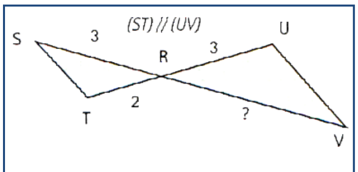


Fig. 8 (RV = ?)

$RV/RU = RS/RT \Rightarrow RV = 3 \times 3/2 = 4,5$.

$DF/DH = DE / DG \Rightarrow DF = 3,5 \times 4/3 = 14/3$
Donc $HF = 14/3 - 3.5 = 3,5/3$ (Environ 1,17)

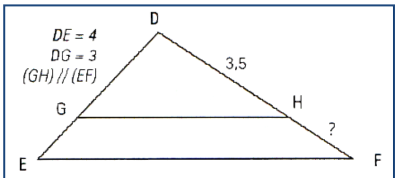


Fig. 9 (HF = ?)

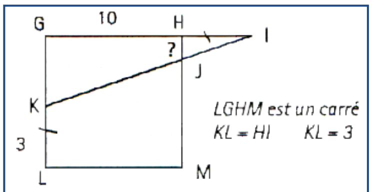


Fig. 10 (HJ = ?)

$HJ/GK = HI/GI \Rightarrow HJ = 7 \times 3/13 = 21/13$ (environ 1,615).

$PU/(PR) = TU/QR \Rightarrow PU = (PU + 1) \times 3/4$
Donc : $4\ PU = 3\ (PU + 1) \Rightarrow PU = 3$.

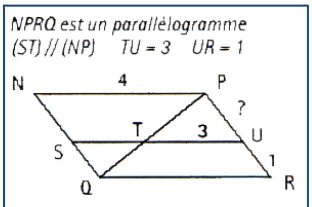


Fig. 11 (PU = ?)

Exercice 9 : *Tracer un segment quelconque. Nommez le [AB] .*
a) Partagez le en 7 parties égales à l'aide du compas et d'une règle non graduée.
Question de cours déguisée. Réponse classique par appel à la technique du guide-âne.
b) L'exercice aurait-il été plus facile, s'il avait fallu partager en 6 parties égales ? en 8 parties égales ?
En 8 parties oui, car on peut chercher « le milieu du milieu du milieu » …
c) On cherche un point M du segment [AB] tel que AM/AB = 1/5. Trouvez-le.
Une seule réponse, facile à construire par la technique exposée en a).
d) On cherche un point N de la droite (AB) tel que AN/AB = 1/5. Combien de solutions ? Trouvez-les.
Le seul piège ici est le suivant : le point N peut appartenir au segment [AB] ; c'est le point M de la question précédente, ou non : il se trouvera alors sur la demi droite [BA) à l'extérieur du segment [AB]. Il y a donc deux solutions à cette question.