Les probabilités au CRPE 2011

La majeure partie de ce document est composée à partir
1/ du chapitre 18 de Charnay-Mante. Cf. http://www.concours-hatier.com/ressources.php ou http://db.vdb.free.fr/tice/CRPE2010/index.html

2/ du site Wikipédia http://fr.wikipedia.org/wiki/Probabilit%C3%A9 et du site de Jérôme Onillon: http://tanopah.jo.free.fr/ADS/bloc3/probafct1.html

I. Rappels de définition

1 Expérience aléatoire

Une expérience est dite « aléatoire » si elle vérifie deux conditions :

- elle conduit à des résultats possibles qu'on est parfaitement capable de nommer ;
- on ne sait pas lequel de ces résultats va se produire quand on mène l'expérience.

Terminologie : on parle aussi d'épreuve.

2 Événement

Une expérience peut amener plusieurs résultats.
On appelle événement la réalisation d'un ou plusieurs résultats.

Évènement élémentaire : est un événement qui n'a qu'un seul résultat.

Univers des possibles : c'est l'ensemble des évènements qui peuvent se produire. Dans certains cas on peut décrire l'univers des possibles en écrivant une liste ou en dessinant un arbre.

Évènement certain : un événement qui se produit à chaque fois que l'on réalise l'expérience. Par opposition un événement impossible ne se produit jamais.

Évènement contraire : c'est l'événement consistant en la non-réalisation d'un événement donné.

Évènement composé : on décrit l'événement à l'aide d'autres évènements soit par réunion (disjonction OU) soit par intersection (conjonction ET).

Évènements incompatibles : lorsque leur intersection est impossible.

Évènements indépendants : le fait de connaître le résultat du premier évènement ne permet pas de prévoir le second et inversement. C'est le cas lorsque la réalisation d'un évènement n'influence pas la probabilité que l'autre se réalise.

3 Des illustrations

Sont des expériences aléatoires :

- on lance une pièce de monnaie et on regarde sur quelle face elle tombe.
- on lance deux dés cubiques numérotés de 1 à 6 et on calcule la somme des points obtenus.

Ne sont pas des expériences aléatoires :

- on trace un carré de 5 cm de côté. On mesure son périmètre.
- On dispose d'une plaque homogène d'aggloméré de 2 m^2 et pesant 20 kg. On y découpe une pièce de 0,3 m^2. On mesure la masse de cette pièce.

Sont des évènements :

- Tirer un jeton au hasard d’un sac contenant les jetons 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ou 8.
- Tirer un nombre pair ; "Tirer un 2" ; "Tirer un 4" ; "Tirer un 6 ; " Tirer un 8" ; "Tirer un nombre inférieur à 3" " Tirer un 1 ou un 2"

Sont des évènements élémentaires :

- "Tirer la dame de cœur" ; "Tirer la dame de carreau" ; "Tirer la dame de trèfle" ; "Tirer la dame de pic".

Sont des évènements composés :

- Tirer une dame : c'est la réunion des 4 évènements élémentaires cités ci-dessus.
- Tirer au dé un nombre pair supérieur à 3 : c'est la conjonction des évènements "tirer un nombre pair" et "tirer un nombre plus grand que 3".

Sont des évènements indépendants :

- Tirer une boule rouge d'un premier sac et une boule verte d'un second sac.
- Lancer deux dés en même temps (Le fait de connaître le résultat du premier dé ne nous aide en rien pour prévoir le résultat du deuxième).

- Lancer deux fois de suite le même dé (Le fait de connaître le résultat du premier lancé ne nous aide en rien pour prévoir le résultat du deuxième lancé).
- Par extension : mener deux expériences séparément (le résultat de la première expérience n'influe pas sur la deuxième et on a alors une indépendance des résultats de la première expérience par rapport à la deuxième).

Ne sont pas des évènements indépendants :

- Tirer une carte puis tirer une carte dans ce qui reste
- Piocher une lettre puis encore une autre au scrabble.
- Plus généralement tous les tirages avec écarts ou sans remise mettent en jeu des évènements non indépendants.

Quelques évidences :

La réunion d'un événement et de son contraire est certaine.
(La probabilité qu'il pleuve ou qu'il ne pleuve pas demain est donc maximale) ;

L'intersection d'un événement et de son contraire est impossible.

Un événement et son contraire sont incompatibles ("tirer une carte sans figure" est incompatible avec "tirer une figure").

II. Notion de probabilité

4 Probabilité : Définition « intuitive »

Pour certaines expériences aléatoires on peut déterminer par un quotient la « chance » qu'un événement a de se produire.

Ce quotient est appelé probabilité de l'événement.

Le cas le plus simple se produit quand l'événement est élémentaire. Plus généralement, chaque fois que l'on peut décrire l'univers des possibles, on peut calculer la probabilité. On parle d'un ***calcul a priori***. Les techniques de la combinatoire sont sollicitées.

5 Probabilité : Définition plus générale (à partir de la notion de fréquence)

Si on répète une expérience aléatoire un très grand nombre de fois, la fréquence de n'importe quel événement de cette expérience finit par se stabiliser autour d'un nombre qui est la probabilité de cet événement.

Ici, on se livre à un ***calcul a posteriori***. Il s'agit donc de probabilité statistique, puisque les méthodes employées partent des résultats d'expériences pour déduire les probabilités.

Noter que lorsque l'univers des possibles est fini, la répétition d'une même épreuve finira par aboutir au même résultat que le calcul a priori.

On peut ainsi unifier les deux approches.

6 Définition mathématique (partielle)

On appelle probabilité une fonction de l'ensemble des évènements sur le segment des nombres réels [0, 1].

Cette fonction vérifie les caractéristiques suivantes :

- La probabilité d'un événement impossible vaut 0;
- La probabilité d'un événement certain vaut 1;
- Si p est la probabilité d'un événement, alors celle de son contraire vaut 1 - p.
- Lorsque deux évènements sont incompatibles, la probabilité de leur disjonction (réunion) est égale à la somme de leurs probabilités.

7 Calculs de probabilité dans le cas des univers finis

On considère ici qu'il est possible d'énumérer tous les résultats possibles d'une épreuve donnée et que le nombre de ces résultats est fini.

C'est toujours le cas lorsque l'épreuve porte sur un nombre fini d'objets qui peuvent prendre un nombre fini de valeurs ou d'états.

Exemples :

- Une rampe lumineuse contient 4 lampes ; chacune d'elle s'allume ou s'éteint aléatoirement.
- Un jeu de bandit-manchot affiche 3 symboles tirés aléatoirement chacun parmi 8.
- On lance deux billes dans une roulette de loterie affichant 80 alvéoles.

Propriété :

Quand les résultats d'une expérience aléatoire ont tous la même probabilité alors la probabilité d'un événement est égale au quotient : $\dfrac{\text{Nombre de } r\acute{e}\text{sultats favorables}}{\text{Nombre de } r\acute{e}\text{sultats possibles}}$

Exemple :

On dispose d'une urne contenant des jetons numérotés de 1 à 12. On tire un jeton au hasard. **Quelle est la probabilité de tirer un multiple de trois ?**

Réponse :

Résultats favorables à la réalisation de l'événement : tirer le n° 3 ; 6 ; 9 ou 12. Il y a donc 4 résultats favorables à la réalisation de l'événement.

Nombre de résultats possibles : 12 (inutile ici de tous les lister).

Donc : Probabilité de tirer un multiple de trois : 4/12 = 1/3.

Probabilité de l'événement contraire

(Il s'agit d'une reprise) Si p est la probabilité d'un événement alors 1 - p est la probabilité de l'événement contraire.

Exemple :

On reprend l'expérience de l'exemple précédent. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir un multiple de 3 ?

T. S. V. P.

Réponse :

La probabilité d'obtenir un multiple de 3 est 1/3. Donc la probabilité de ne pas obtenir un multiple de 3 est 1 - 1/3 = 2/3.

Probabilité dans le cas de 2 évènements indépendants

Si deux événements A et B d'une expérience aléatoires sont indépendants alors la probabilité de l'événement « A et B » est égal au produit des probabilités de A et de la probabilité de B :

P (A et B) = P(A) x P(B)

Exemple :

On dispose de deux sacs. Le sac A contient deux boules rouges et trois boules vertes. Le sac B contient cinq boules jaunes et trois boules bleues.

« Tirer une boule rouge du 1er sac » et « Tirer une boule jaune du 2e sac » sont deux événements indépendants. La probabilité de l'événement «Tirer une boule rouge du 1^{er} sac et tirer une boule jaune du $2^{ième}$ sac» est donc égale à 2/5 x 5/8 = 10/40 = 1/4.

Fin du cours proprement dit.

III. Pour s'entrainer

Tous les exercices cités ci-dessous proviennent de Charnay-Mante.

EXERCICE 1

On dispose d'un sac contenant des boules rouges et des boules blanches.
Voici des résultats d'étudiants :

a) Probabilité d'obtenir une boule rouge : 5/4.
b) Probabilité d'obtenir une boule rouge : 1/4. Probabilité d'obtenir une boule blanche : 4/5.

Que pensez-vous de ces résultats ?

EXERCICE 2

On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. Quelle est la probabilité des événements suivants :

a) Obtenir un multiple de 2.
b) Obtenir un nombre premier.
c) Obtenir un nombre inférieur à 5.

EXERCICE 3

On dispose d'un sac qui contient les 26 lettres de l'alphabet. On tire un jeton au hasard, quelle est la probabilité des événements suivants :

a) Obtenir une voyelle.

b) Obtenir une lettre du mot « Concours ».

EXERCICE 4

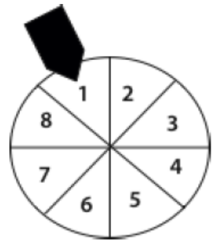
On dispose d'une urne qui contient 3 boules rouges, 2 boules vertes, 1 boule blanche et 2 boules bleues.

a) On tire une boule de cette urne. Probabilité des événements suivants :

(1) Tirer une boule verte.
(2) Tirer une boule rouge ou verte.
(3) Tirer une boule de la couleur du drapeau français.

b) On répète l'expérience un très grand nombre de fois. Vers quel nombre doit tendre la fréquence de l'événement « Tirer une boule bleue » ?

EXERCICE 5



On fait tourner la roue illustrée ci-contre (partagée en 8 secteurs circulaires égaux) et l'on regarde le numéro du cadran dans lequel tombe l'aiguille.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir 6 ?
b) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre premier ?
c) On répète cette expérience un grand nombre de fois. Vers quel nombre doit tendre la fréquence de l'événement « L'aiguille tombe sur un nombre pair » ?

EXERCICE 6

Dans un sac il y a 12 boules, des boules vertes et des boules rouges.
La probabilité de tirer une boule verte est de 2/3.

Combien y a-t-il de boules vertes ?

EXERCICE 7

Prenons un tas de cartes ne contenant que des trèfles et des piques. On sait que la probabilité de tirer un trèfle est de 3/7. Quelle est la probabilité de tirer un pique ?

EXERCICE 8

Prenons un tas de cartes ne contenant que des cœurs, des carreaux et des trèfles. On sait que la probabilité de tirer un cœur est de 2/5 et la probabilité de tirer un carreau est de 3/7. Quelle est la probabilité de tirer un trèfle ?

EXERCICE 9

On lance un dé rouge et un dé vert.

Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair avec le dé rouge et un multiple de 3 avec le dé vert ?

PROBLEME 1

On lance en même temps deux pièces de monnaie. On note pour chaque pièce si elle tombe sur «pile» (noté P dans la suite) ou «face» (notée F dans la suite).

a) Quelles sont les résultats possibles de cette expérience ?

T. S. V. P.

b) Parmi les affirmations suivantes, quelles sont celles qui sont vraies, faire un pronostic :

(1) On a autant de chance d'avoir les événements suivants « Obtenir deux fois pile », « Obtenir deux fois face », « Obtenir une fois pile, une fois face ».
(2) On a plus de chance d'« Obtenir une fois pile, une fois face » que d'« Obtenir deux fois face ».
(3) On a deux fois plus de chance d'« Avoir une fois pile, une fois face » que d'« Avoir deux fois pile ».

c) Pour répondre à la question précédente il faut calculer les probabilités des événements «Obtenir deux fois pile», «Obtenir deux fois face», «Obtenir une fois pile, une fois face». Pour cela, dessiner un arbre de choix.

PROBLEME 2

Expérience : On lance simultanément deux dés, et l'on additionne les nombres obtenus.

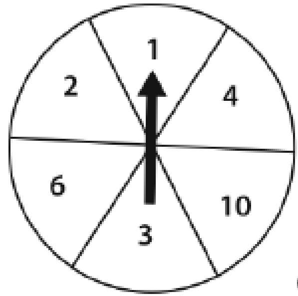
a) Quel est l'ensemble des résultats possibles ?

b) Astrid affirme « la probabilité de chaque somme est la même ». Est-ce exact ?

c) Calculer les probabilités de chacun des résultats possibles en complétant le tableau ci-dessous. Dans ce tableau le nombre d'une case est obtenu en additionnant le nombre de la ligne et de la colonne correspondante :

1^{er} dé -> $2^{ième}$ dé ↓	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

PROBLEME 3



Au stand d'une fête foraine un jeu consiste à faire tourner la roulette. Si l'aiguille s'arrête sur un nombre impair on tire un lot dans un sac. Dans ce sac il y a 3 voitures bleues et une voiture blanche.

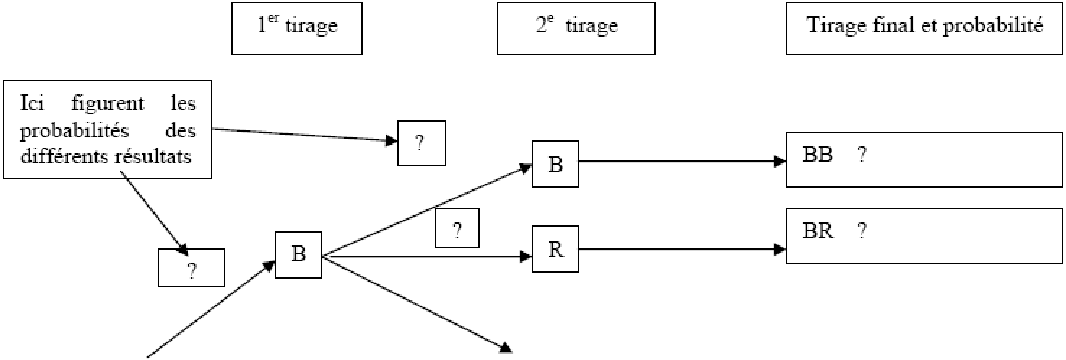
Quelle est la probabilité d'avoir une voiture bleue ?

PROBLEME 4

On dispose d'un sac contenant 3 boules bleues, 2 boules rouges et une boule verte. On tire une 1re boule dont on note la couleur puis une 2e boule sans remettre la boule précédente.

a) Établir un arbre de probabilité, pour calculer la probabilité de chaque tirage.
b) Calculer la probabilité de tirer deux boules de même couleur.
c) Calculer la probabilité d'avoir au moins une boule bleue.

On trouvera en haut de la page 17 le début de l'arbre attendu.



PROBLEME 5

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées 1 ; 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 4 et de deux sacs qui contiennent des boules. Le sac A contient une boule rouge et deux boules noires. Le sac B contient deux boules jaunes et deux boules vertes.

Règle : On lance le dé, s'il tombe sur 1 alors on tire une boule dans le sac A ; s'il tombe sur 2, 3 ou 4 alors on tire alors une boule dans le sac B.

Pierre propose à Paul le jeu suivant :

- si on tire une boule jaune personne ne gagne ;
- si on tire une boule noire je gagne 1 point ;
- si on tire une boule rouge ou une boule verte tu gagnes 1 point.

Le jeu est-il équitable ?

Pour répondre à cette question établir un arbre de probabilité pour calculer la probabilité de chaque résultat.

IV. Vous trouverez les corrigés dans la plaquette : Probas_CRPE(Corr).docx