

Deux leçons sur la perpendicularité et le parallélisme

I. Vérifier le parallélisme de 2 droites et tracer des droites parallèles au CM

Analyse sémantique

Vérifier : Selon le Littré "s'assurer si une chose est telle qu'elle doit être". Ici il s'agit de vérifier une caractéristique : le parallélisme. Cette caractéristique doit donc être reconnue, donc connue. La vérification passe donc par une validation, soit au moyen d'une assertion (il y a alors consensus) soit au moyen d'instruments. Dans ce dernier cas, la maîtrise de ces instruments doit être avérée.

Tracer : fait de tirer des traits ou des lignes. Le titre est paresseux : on trace des lignes droites mais pas des droites qui sont des idéalisations. Selon les outils employés, on peut être amené à tracer en même temps deux lignes, qui se révèlent parallèles ou une première puis une seconde qu'on s'attache à rendre parallèle à la première. Lorsqu'on travaille avec un logiciel de dessin vectoriel, la duplication d'un trait produit toujours des traits parallèles.

Copule et : Ce copule semble introduire une disjonction entre les deux termes de l'énoncé ; il s'agirait d'apprendre à vérifier ou de savoir tracer. Bien entendu, il n'en est rien et l'on tient ici une opposition dialectique.

Dans les programmes

2ième palier Socle Commun (donc à l'issue du CM 2) :

- *utiliser la règle, l'équerre et le compas pour vérifier la nature de figures planes usuelles et les construire avec soin et précision ;*

Dans les programmes du cycle 3, dans la section 2_ Géométrie, on lit :

L'objectif principal de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets [...]

Les relations et propriétés géométriques : alignement, perpendicularité, **parallélisme**, égalité de longueurs, symétrie axiale, milieu d'un segment.

L'utilisation d'instruments et de techniques : règle, équerre, compas, calque, papier quadrillé, papier pointé, pliage.

Les figures planes : le carré, le rectangle, le losange, le **parallélogramme**, le triangle et ses cas particuliers, le cercle : - description, reproduction, construction ;

Progressions pour le CM 1 :

Dans le plan :

- *Reconnaître que des droites sont parallèles.*

- *Utiliser en situation le vocabulaire géométrique : points alignés, droite, droites perpendiculaires, **droites parallèles**, segment, milieu, angle, axe de symétrie, centre d'un cercle, rayon, diamètre.*

- *Vérifier la nature d'une figure plane simple en utilisant la règle graduée, l'équerre, le compas. {Cette vérification peut passer par le repérage de segments parallèles NDR}*

Progressions pour le CM 2 :

*Dans le plan - Utiliser les instruments pour **vérifier le parallélisme** de deux droites (**règle et équerre**) et pour tracer des droites parallèles.*

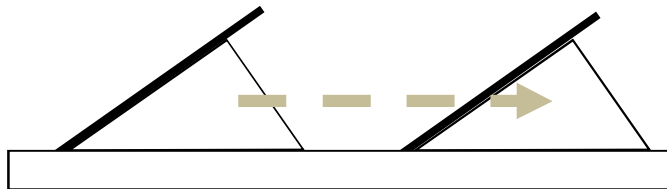
Éléments théoriques

Le concept de parallélisme n'est pas facile à fonder, en particulier parce que la notion de droite n'est pas elle-même évidente pour des élèves de l'école primaire.

On doit commencer par fonder la notion d'alignement, de points alignés, d'où l'on dérive l'idée de droite. Les supports les plus classiques de cette notion sont le **trait**, le **pli** dans une feuille de papier, le **rai de lumière**, la **ficelle tendue**. Toutes sont des épures imparfaites mais relativement fiables de l'idée de droite, pour la géométrie que l'on veut produire, celle d'Euclide.

On peut repérer 3 significations du parallélisme et relier cette notion à 2 autres relations.

i) droites de même direction : repérage dans le plan ou l'espace de droites de même direction, souvent parce qu'elles sont penchées pareil : bords de la table, traits de la nappe à carreaux, gouttière et faite du toit.
En faisant glisser une équerre sur une règle fixe, on génère de telles droites parallèles.



Dans cette perception, l'une des droites est perçue comme une translatée de l'autre (dans le mouvement, plein de droites parallèles apparaissent fugacement entre les deux) et dans la translation l'angle entre la première droite et celle qui permet de faire glisser est constant.

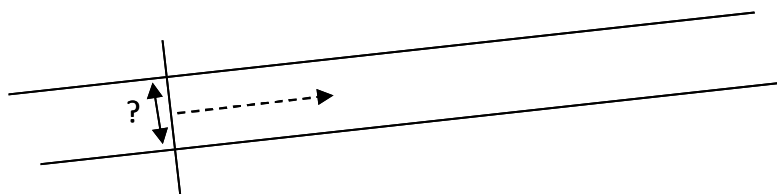
On retrouve de façon actée (en situation) le théorème selon lequel deux parallèles définissent avec une sécante des angles correspondant égaux.

ii) droites qui ne se coupent pas : c'est la définition qui pose le plus de problème !

Elle n'est valide que dans le plan, pas dans l'espace. Ces deux droites ne se coupent pas dans le micro-espace, ni sans doute dans le méso-espace, mais *plus loin* ? Cette signification n'est pertinente que pour certifier des droites qui ne sont manifestement pas parallèles, parce qu'elles se coupent...

iii) droites d'écart constant : dans un premier contact, il s'agit des traits tracés de part et d'autre d'une règle plate. Les avenues rectilignes, les voies de chemin de fer peuvent aussi initier cette signification (tant qu'on les observe localement, mais dès qu'on se laisse à les suivre jusqu'à l'horizon, on perd la représentation du parallélisme). Une troisième concrétisation passe par l'observation de la trace d'une brouette à deux roues longeant un mur rectiligne. On peut aussi dérouler avec application un scotch - comme en utilisent les peintres-tapissiers - et observer le parallélisme des deux bords de la bande obtenue.

Cette caractérisation reste longtemps intuitive au cycle 3. On peut la rendre plus certaine en observant l'évolution de la longueur du segment obtenu par intersection de ces deux droites avec une perpendiculaire à l'une d'elle lors de son déplacement.





Certains matériels, comme la règle roulante, facilitent ce genre d'observation.

En fin de Cycle 3, on peut lancer un chantier, en prévision du collège, autour de la **notion de distance à une droite** débouchant sur le constat que lorsque deux droites sont parallèles, la distance d'un point de la première à la seconde ne dépend pas du choix de ce point.

iv) de la double perpendicularité : la perpendiculaire à une perpendiculaire à une première droite lui est parallèle. On retrouve un axiome de la géométrie théorique. On en déduit que deux perpendiculaires à une même troisième sont parallèles.

Les élèves approchent cette notion empiriquement au Cycle 3, par exemple à l'occasion de l'étude de certaines figures présentées de façon non stéréotypée.

v) des côtés opposés de certains quadrilatères parallèles : bien que fondamental, **ne semble pas une occurrence du parallélisme repérée par les élèves**. De nombreux travaux semblent indiquer que des élèves de CM2 mettront en œuvre une comparaison de longueurs de cotés, une recherche d'angles droits, voire une observation sur les diagonales, mais **très rarement le parallélisme de 2 cotés**.

Deux exemples de progressions

A/ >Chez Ermel

La notion est introduite au CE2 puis travaillée pour elle-même ou en relation avec la perpendicularité au cours du CM1 et du CM2. Au CM1 puis surtout au CM2, il intervient comme outil de résolution de problèmes dans le cadre de situations de synthèse.

Lors du CE 2, les élèves ont expérimentés :

- ✚ Découverte de traits parallèles (repérage, production) ;
- ✚ Utilisation implicite dans des exercices de tracé de figures familières sans angle droit (trapèze) ;

Lors du CM1, les élèves rencontrent :

- ✚ Parallélisme comme écart constant (2 roues) ;
- ✚ Constitution d'un réseau de parallèles à travers une situation de type puzzle d'abord au jugé ensuite à l'aide d'un outil de vérification (la perpendicularité) ;
- ✚ Application à la construction d'un rectangle.

Et au CM 2 :

La notion est travaillée à travers 6 séances de consolidation puis 2 situations de synthèse, occupant chacune 2 séances.

Les notions travaillées sont : la relation entre angle droit et parallélisme, la relation entre parallélisme et double perpendicularité. Ce faisant la notion de distance d'un point à une droite est approchée.

Le séquençage est le suivant :

- ✚ Consolidation 1 : autour de la modélisation d'une rotonde de chemin de fer ; Identification perceptivement la relation de parallélisme comme caractéristique d'une "paire de droite" ; construction de deux segments parallèles, chacun étant

déterminé par sa distance à un point fixe ; ce travail fait vivre les notions de cercle, corde, rayon, parallélisme, distance d'un point à une droite.

- ✚ Consolidation 2 : Retour sur la notion d'angle (rappel : ni définition, ni mesure !), ceci afin de déterminer correctement certains polygones (puisque la mesure des longueurs des seuls cotés ne suffit pas).

Cette phase permet de lancer les deux situations de synthèse :

- ✚ Synthèse n°1 : combien d'angles droits dans un triangle ou un quadrilatère ? Les élèves affrontent un problème d'existence, produisent des schémas pour argumenter de l'existence ou de la non existence, manipulent les propriétés du parallélisme, dont ceux liés à la perpendicularité.
- ✚ Synthèse n°2 : autour de la notion de distance, d'un point à une droite, entre deux droites parallèles.

Note importante : l'exposé par Ermel des situations correspondantes occupe environ une centaine de pages. Impossible de restituer ce matériel ici.

Pour une première approche lire sur mon site le fichier GGMAPMEP(extraits).pdf.

B/ >Chez les auteurs d'EuroMaths

Au CM1 :

- ✚ Le concept de parallélisme est installé sous l'angle des "paires de droites parallèles" en s'appuyant sur la notion d'écart constant. Une première situation est proposée dans la cour. Elle est reprise en classe sur un plan à l'échelle. Le moyen commode de mesurer l'écart entre deux droites passe par l'équerre. La notion de perpendiculaire est alors consolidée.
- ✚ Le travail se poursuit par la conquête de méthodes pour produire des droites parallèles : faire apparaître une perpendiculaire à une perpendiculaire à une première droite, ou placer deux points à une distance donnée de la première droite puis tracer la parallèle cherchée.
- ✚ Dans une troisième séance, les notions de parallélisme ou de perpendicularité sont utilisées par les élèves dans le cadre d'un jeu de qui est-ce. Mais, étrangement, dans la phase d'institutionnalisation, la caractéristique des figures étudiées (le rectangle en fait) et liée au parallélisme est absente.
- ✚ Beaucoup plus tard, le parallélisme apparaît comme moyen commode de compléter par symétrie axiale, et dans certains cas, l'ébauche d'une figure.

Au CM2 :

- ✚ La notion n'intervient explicitement dans la TdM qu'une seule fois, plutôt assez près du début de l'année et en relation avec la perpendicularité : Étape 18 "Droites perpendiculaires et droites parallèles". Il s'agit clairement d'une leçon de rappel qui voit l'appel à la notion de perpendiculaire commune ou à l'écart constant.

C'est en fait la notion de distance qui vient structurer tout le travail. On lit en effet dans le LdM : L'étape 26 (74-75) est une étape de synthèse, elle conduit les élèves à structurer leurs connaissances à partir de la notion de distance (de deux points, de deux droites, d'un point à une droite) dans une situation de régionnement du plan. [...] Le parallélisme de deux droites est pensé également à partir de la notion de distance : l'ensemble des points dont la distance à une

droite d est inférieure à un nombre donné sont situés dans une « bande » définie par deux droites parallèles à la droite d .

✚ Les relations (perpendicularité et parallélisme) deviennent ainsi des outils au service pendant la période 4 d'une étude locale des figures planes. Après une étape de synthèse (étape 48, p. 132-133), les élèves sont confrontés (étape 49, p. 135) à des problèmes de reproduction de figures moins classiques conçues de façon à « bloquer » des procédures centrées sur le mesurage et le report et à favoriser l'utilisation de propriétés géométriques.

L'objectif énoncé est sans ambiguïté : identifier des propriétés d'alignement, d'égalité de longueurs, de perpendicularité ou de parallélisme pour reproduire des figures.

✚ Retour sur la dernière tâche demandée aux élèves (tout en bas de la page 135). Un grand carré vert contient un carré rouge. Ces deux figures sont dans la même disposition que les deux carrés en traits épais de la figure ci-contre. On demande aux élèves de construire le carré vert à partir du seul carré rouge, puis un carré bleu à partir du seul carré vert. Dans une seconde consigne, on demande aux élèves le travail inverse : construire le carré rouge à partir du seul carré vert.

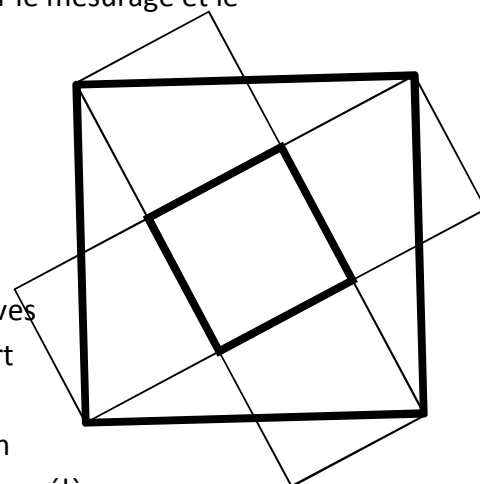
Bien entendu, la structure sous-jacente n'est pas fournie aux élèves !

Le travail de repérage est complexe.

Pour remplir la première consigne, il peut suffire de repérer des alignements et des égalités de segments.

Pour remplir la seconde, si l'on n'a pas observé que les cotés du petit carré s'alignaient systématiquement avec un sommet et un milieu de côté du grand, on en est réduit à exhiber deux couples de droites parallèles et de même écart. On produira bien un petit carré à l'intérieur du grand, mais sans doute pas le bon.

C'est pourquoi le LdP indique que cet exercice doit être accompagné par l'enseignant ... Quel euphémisme prudent ? Mais qui va vraiment travailler ?



Remarque ultime sur ce thème

La notion de parallélisme est donc tout sauf une découverte au CM2. Est-elle pour autant bien stabilisée ?

II. La perpendicularité au CE2

Dans les programmes

1er palier Socle Commun (donc à l'issue du CE 1) : - utiliser la règle et l'équerre pour tracer avec soin et précision un carré, un rectangle, un triangle rectangle ;

Dans les programmes du cycle 3, dans la section 2_ Géométrie, on lit :

L'objectif principal de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure.

Les relations et propriétés géométriques : alignement, **perpendicularité**, parallélisme, égalité de longueurs, symétrie axiale, milieu d'un segment.

L'utilisation d'instruments et de techniques : règle, **équerre**, compas, calque, papier quadrillé, papier pointé, pliage.

Les figures planes : le carré, le rectangle, le losange, le parallélogramme, le triangle et ses cas particuliers, le cercle : - description, reproduction, construction ;

Et dans la section 3_ Grandeurs et mesures, on lit :

Les angles : comparaison, utilisation d'un gabarit et de l'équerre ; **angle droit**, aigu, obtus.

Dans les progressions pour le cycle 2, on trouve cette seule ligne se rapprochant plus ou moins du sujet :

- Vérifier qu'un **angle** est **droit** en utilisant **l'équerre** ou un gabarit.

Éléments théoriques

Le concept de perpendicularité n'est pas facile à fonder. On trouve 4 points d'entrée :

i) des directions privilégiées : en se relevant et en conquérant la position debout, le petit d'homme structure spontanément l'espace sensible horizontalement et verticalement (axe des épaules et axe pinéal). Progressivement, les positions relatives de ces deux directions privilégiées sont plaquées sur d'autres formes sensibles (carreau de la fenêtre) puis sur d'autres figures quitte à subir une rotation. Un invariant perceptif se fait ainsi jour à partir du cycle 1.

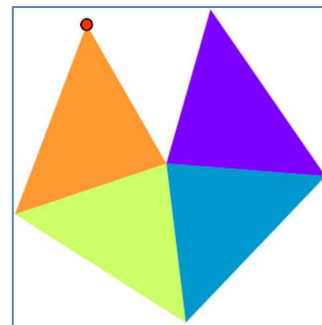
ii) position d'équilibre (vers l'angle droit) : on prend deux baguettes et on les lie par leur milieu. L'une reste fixe quand l'autre peut évoluer autour de son point d'attache. Perceptivement, on perçoit une position d'équilibre quand la seconde est à angle droit de la première.



Une déclinaison est la reproduction d'un secteur angulaire : le quart de tour est le seul angle qui effectué quatre fois de suite permet de retrouver sa position initiale.

On trouvera sur mon site à la page Geom/GeoDyn/index2.html un fichier Geogebra permettant d'appliquer cette vision¹.

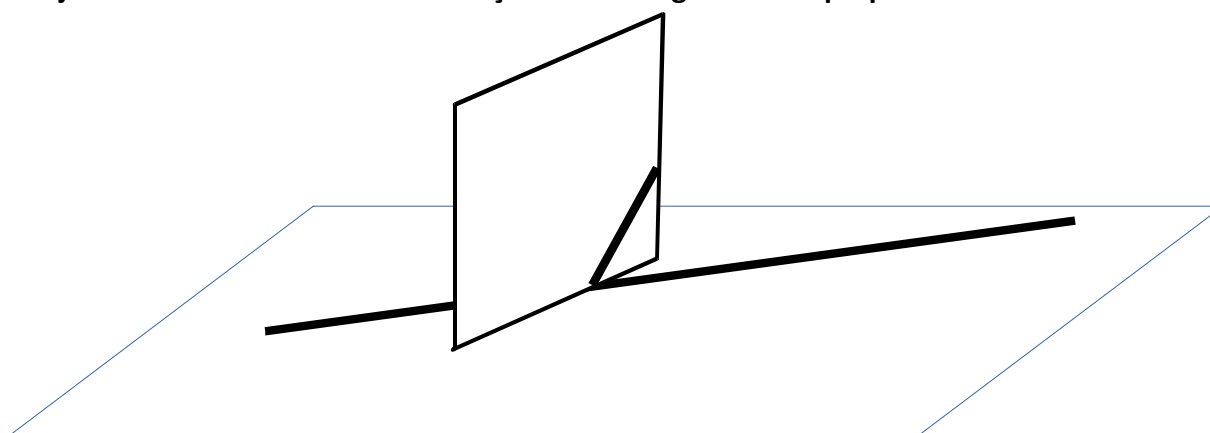
Une poignée permet d'ouvrir ou refermer un éventail constitué de 4 panneaux toujours égaux.



Une déclinaison statique est obtenue par pliage pli sur pli. On produit ainsi un gabarit qui vaudra bien toutes les équerres.

Noter que jusqu'ici on révèle soit la position relative de deux droites, soit la nature d'un secteur angulaire. Pour unifier les deux constats, il faut appliquer le gabarit de l'angle droit sur la configuration des baguettes.

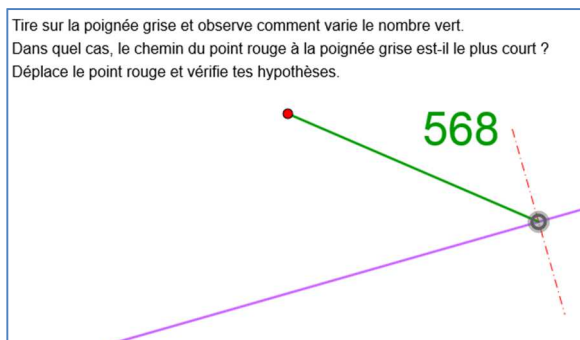
Les jeux de miroirs sont une autre façon de lier angle droit et perpendicularité.



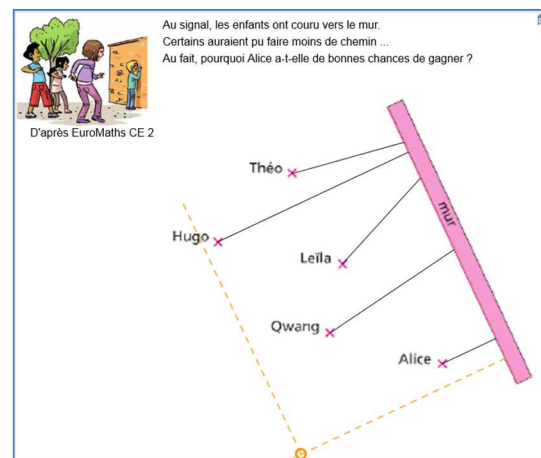
Sur une table, on dispose une feuille blanche sur laquelle on trace un trait épais. Puis on pose un miroir au bord suffisamment épais pour qu'il puisse garder sa position. Si le miroir n'est pas placé perpendiculairement au trait, le reflet du trait est cassé. Ainsi, la trace du miroir sur la feuille joue le rôle de la baguette mobile, tandis que le trait épais remplace la baguette fixe.

iii) perpendicularité et distance : la projection orthogonale d'un point A sur une droite (D) est le point H de cette droite qui minimise la distance $\forall (A,M)/M \in (D)$.

On peut facilement simuler avec un logiciel de géométrie dynamique.



On peut aussi s'appuyer sur l'expérience concrète des enfants en modélisant le jeu 1, 2, 3, soleil ...



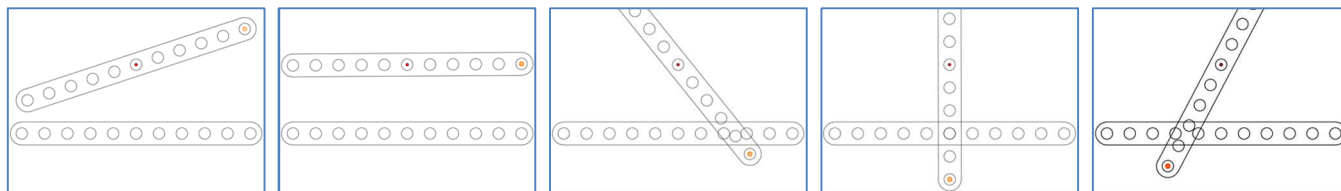
Noter que c'est peut-être la seule présentation qui pourra déboucher, après un

¹ En fait deux fichiers sont disponibles : Evantails(Ce2).ggb et Evantails(CM2).ggb

changement de registre (du spatial vécu au théorique)- de déboucher, disais-je, sur une définition réellement mathématique.

Une variante unifie cette approche avec celle des positions d'équilibre.

Une barre –par exemple de meccano- pivote autour d'un point fixe. Elle prend deux positions particulières relativement à une seconde barre, fixe.

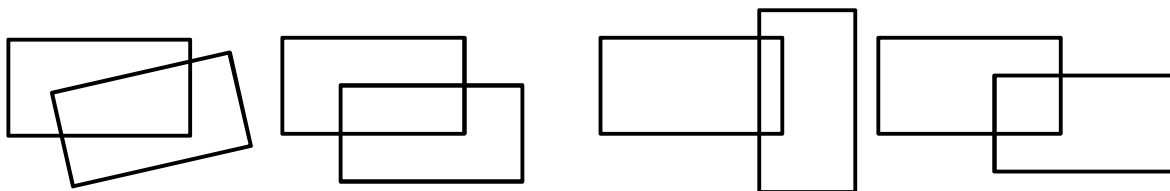


La première position d'équilibre consiste en deux parallèles, la seconde en deux perpendiculaires.

8

iv) perpendicularité et rectangle : l'objet est simple et si courant, table, fenêtre, feuille de papier. Le rectangle est une forme archétype, pouvant apparaître de multiples façons, ce qui autorise de nombreuses expériences.

Exemple : sur une feuille blanche, fixe, tracé d'un rectangle ; sur un papier-calque, mobile, tracé d'un autre rectangle. Que voit-on quand on place le second sur le premier, décalé ? Comment est-on certain de faire apparaître un rectangle ? un carré ?

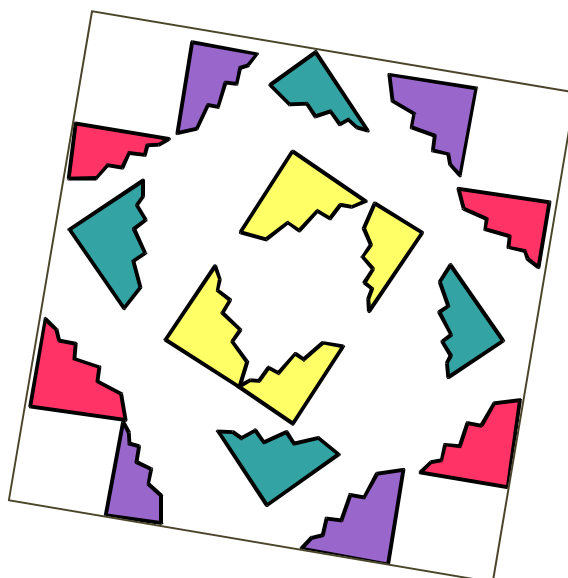


⊕ Les coins sont tous identiques : chacun d'eux peut servir de gabarit pour repérer des perpendiculaires. Par découpage, on retrouve le critère *4 droits = 1 tour*.



On peut profiter de ce découpage des 4 coins pour poser le problème suivant : coller les 4 coins espacés pour que l'on puisse deviner un rectangle.

Voici un exemple de production où l'on a joué avec 4 fois 4 coins :



⊕ L'angle droit -et de façon concomitante le parallélisme des cotés opposés- devient rapidement un invariant de cette forme : par prolongement à la règle, on fait apparaître des *semblant* de droites perpendiculaires ou parallèles.



- ⊕ Par la suite (on quitte le CE 2) il sera loisible de poser des problèmes comme :
- ⌘ un quadrilatère qui a deux côtés de même longueur, perpendiculaires à un troisième est-il un rectangle ?
 - ⌘ Peut-on construire un quadrilatère disposant de 3 angles droits exactement ?

Ultimes remarques :

- ✚ Les 4 points d'entrée énoncés ci-dessus sont évidemment complémentaires.
- ✚ Les travaux engagés au CE2 restent encore très perceptifs, même s'ils visent à installer un vocabulaire et un langage géométriques maîtrisés.

Deux exemples de progressions

A/ >Chez les auteurs d'EuroMaths

Présentation globale dans le LdM : Les relations géométriques et les concepts fondamentaux (alignement, perpendicularité, égalité de longueur, milieu, symétrie axiale) sont donc étudiés tout d'abord dans l'espace environnant (més-espace) à partir de la perception, au cours de jeux proposés dans les activités préparatoires. Ils sont repris dans l'espace plan de la feuille de papier (micro-espace) pour que les élèves affinent les images mentales qui leur sont associées et les rendent fonctionnelles. Ils sont enfin utilisés dans l'analyse, la reproduction ou la construction de figures planes ou de représentations planes de solides, ce qui contribue à engager les élèves dans un changement de point de vue sur ces objets.

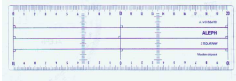
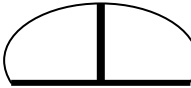
Extraits de la TdM : **Etape 22** : de l'angle droit / Les élèves s'entraînent à reconnaître des angles droits dans diverses figures, qu'ils soient identifiables directement ou qu'ils soient traversés par des segments. Le travail (2 séquences) est initié à partir de l'observation d'un cube représenté en perspective cavalière.

Etape 26 : Droites perpendiculaires, angles droits / Les élèves se construisent des images mentales de droites perpendiculaires quelles que soient leurs directions et comprennent que deux droites perpendiculaires forment des angles droits. La découverte passe par le jeu "1, 2, 3 Soleil". A peu près toutes les entrées décrites ci-dessus sont reprises. **Il est sans doute intéressant de focaliser lors de l'exposé sur cette double page.**

B/ >Chez Cap-Maths

Le travail proposé occupe 10 à 11 séances, ce qui semble important. Je ne reproduis pas ici ce découpage. Voir le manuel. On devine les difficultés à exposer une progression de façon vivante en s'appuyant ce manuel. On se contente donc de présenter page suivante une programmation simplifiée selon ERMEL.

Progressions et objectifs de situations sur les concepts d'angle droit et de perpendicularité pour le CE 2 selon Ermel.

	Situations	Description rapide	Objectifs	Objets et relations	Durée
CE 2	1. Rectangle à terminer 1	On utilise, de façon implicite la connaissance que les élèves ont, par la perception, de la relation de perpendicularité de deux côtés consécutifs d'un rectangle. Une partie d'un côté étant fournie, il s'agit de tracer le trait qui permet de compléter le « coin » du rectangle. Le problème est spatial ; il est résolu par des procédures s'appuyant sur la perception.	- Utiliser la connaissance du rectangle en tant qu'objet global pour identifier l'angle droit en isolant un de ses sommets. - Introduire une terminologie adaptée : « angle droit ». - Faire percevoir (sans l'institutionnaliser) qu'à chaque sommet d'un rectangle se trouve un angle droit.	Angle droit Perpendicularité (sans la nommer) de deux côtés consécutifs d'un rectangle	2 séances
	2. Quatre droits pour un tour	Une forme étant donnée, l'élève doit la recouvrir entièrement, sans superpositions, en juxtaposant des coins dont les sommets sont placés sur un point au centre de la forme. Le problème principal consiste à construire le coin qui, reporté 4 fois, permet de recouvrir la forme entièrement.	- Percevoir que dans différentes représentations d'un même angle, seule l'ouverture est invariante et non la longueur des traits ou la surface. - Envisager un angle droit comme angle du quart de tour (ou quart de l'angle plein). - Construire un angle droit. - Fixer des éléments de vocabulaire : angle, report, « tour ».	Angle Égalité d'angles, comparaison d'angles Angle droit	3 séances
	3. Trait sur trait	L'élève doit anticiper la position du pli passant par un point et permettant d'amener un trait sur un trait. L'angle droit apparaît ici dans un contexte de perpendicularité de droites. Il ne s'agit pas d'introduire la terminologie correspondante et aucune institutionnalisation de la perpendicularité n'est prévue.	- Identifier la nécessité d'un angle droit entre le trait et les droites permettant un pliage trait sur trait. - Repérer les angles droits dans cette configuration et constater que chaque intersection de traits « fabrique » quatre angles droits.	Angle droit Perpendicularité (sans la nommer) de deux traits dans un pliage trait sur trait.	2 séances
	4. Construire un angle droit	Cette situation permet d'institutionnaliser à la fois le langage et la manipulation des différents instruments associés au concept d'angle droit approchés au cours des situations précédentes.	- Établir le lien entre les différentes significations de l'angle droit par une situation de construction et identifier l'angle droit dans différentes configurations. - Savoir utiliser correctement chacun des instruments : équerre, réquerre, téquerre, double pliage pour construire un angle droit. - Utiliser à bon escient l'expression « angle droit ».	Angle droit Réquerre :  Téquerre : 	1 séance
	5. C'est d'équerre	Trois problèmes de réinvestissement qui peuvent s'utiliser en CE2 après les quatre situations précédentes ou en CM1 pour entrer dans le thème « Perpendicularité ».	- Utiliser les instruments relatifs à l'angle droit à bon escient. - Se constituer un champ d'expériences graphiques résultant de l'emploi d'un des outils cités. - Percevoir l'insuffisance du contrôle perceptif pour identifier des relations de perpendicularité ou construire des droites perpendiculaires.	Angle droit Angle « presque droit »	Activité d'entraînement