La géométrie plane sous l'angle du concept de distance

- Depuis Euclide, nombre de systèmes axiomatiques ont été inventés en vue d'une fondation théorique acceptable de la géométrie -euclidienne- à deux ou trois dimensions. Ici on ne se préoccupe que de la géométrie plane.
- Le système qui suit se veut surtout pratique, dans l'optique de la préparation à l'épreuve de Mathématiques du CRPE.
- Le recollement avec d'autres ensembles d'axiomes n'est pas abordé ici.

Autour de la notion de distance

Axiome n°1

On appelle Plan la donnée d'une infinitude d'éléments, appelés Points, et vérifiant l'ensemble des axiomes à venir. On note $(\mathcal{P})$ cet ensemble.

Axiome n°2

Il existe une fonction -la distance- notée $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}$ dans $\Re+$ et telle que :

- $\forall$ P $\in (\mathcal{P})$, $\forall$ Q $\in (\mathcal{P})$, $\mathcal{D}$(P, Q) = 0 $\Leftrightarrow$ P = Q {distance nulle $\Leftrightarrow$ points confondus
- $\forall$ P $\in (\mathcal{P})$, $\forall$ x $\in \Re+$, $\exists$ Q $\in (\mathcal{P}) \ni \mathcal{D}$(P, Q) = x.

{Suite ->}

- $\forall$ P $\in$ ($\mathcal{P}$) , $\forall$ Q $\in$ ($\mathcal{P}$), $\forall$ M $\in$ ($\mathcal{P}$), $\mathcal{D}$(P, M) + $\mathcal{D}$(M, Q) $\geq$ $\mathcal{D}$(P, Q)
- $\forall$ P $\in$ ($\mathcal{P}$), $\forall$ Q $\in$ ($\mathcal{P}$), P $\neq$ Q, $\forall$ x $\in$ [0, 1] $\exists$! M $\in$ ($\mathcal{P}$) $\ni$ $\mathcal{D}$(P, M) = x $\mathcal{D}$(P, Q) et $\mathcal{D}$(M, Q) = (1 - x) $\mathcal{D}$(P, Q).

Axiome n°3

Soient A et B deux points distincts et β, α deux réels positifs tels que : $\beta + \alpha > AB$.
Alors, il existe deux points distincts C_1 et C_2 tels que : $AC_1 = AC_2 = \beta$ et $BC_1 = BC_2 = \alpha$.

Définition

On dira que trois points U, V, W, sont alignés si et seulement si, à permutation près des lettres : $\mathcal{D}$(U, V) + $\mathcal{D}$(V, W) = $\mathcal{D}$(U, W).

Par la suite on écrira UV pour $\mathcal{D}$(U, V).

Axiome n°4

Si A, B, C sont alignés et si B, C, D sont alignés, alors A,B, D sont alignés.

Définitions

U et V sont deux points distincts.
On appelle droite (UV) l'ensemble des points alignés avec les points U et V.

{Suite ->}

On appelle segment [UV] l'ensemble des points M tels que U, M, V soient alignés (strict).
On appelle demi-droite [UV) l'ensemble des points M tels que M $\in$[UV] ou UV + VM = UM

<u>Conséquences</u> :
i) Par deux points distincts ne passe qu'une seule droite ;
j) Une droite (UV) est la réunion des demi-droites [UV) et [VU), dont l'intersection n'est rien que le segment [UV].
k) On peut définir la notion de milieu d'un segment.

Définition

Deux droites sont parallèles si elles n'ont aucun point d'intersection.

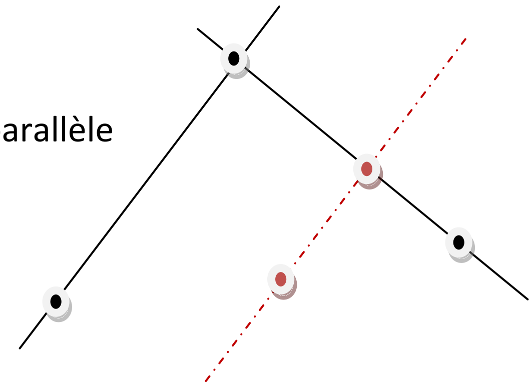
Axiome n°5

Par un point A non sur ($\mathcal{D}$), on peut mener une parallèle à ($\mathcal{D}$) et une seule.

La notion est transitive : $(\mathcal{D}_1) // (\mathcal{D}_2)$ et $(\mathcal{D}_2) // (\mathcal{D}_3) \Rightarrow (\mathcal{D}_1) // (\mathcal{D}_3)$

Axiome n°6

Deux droites sont soit confondues, soit parallèles, soit sécantes en un seul point.



Axiome n°7

Soient U, V, W trois points distincts et non alignés.
Alors quelque soit le point M distinct de U, V, W, la parallèle à (UV) passant par M recoupe (VW) en un point.

Cet axiome assure la planéité de l'espace.

Axiome n°8

Soit A un point non sur une droite ($\mathcal{D}$) et M un point quelconque de cette droite. Alors il existe une position et une seule pour laquelle la distance de AM est minimale.

Définition

Pour cette position particulière, la droite (AM) est appelée la perpendiculaire à la droite ($\mathcal{D}$) passant par A. Le point M particulier est appelé le projeté orthogonal du point A sur la droite ($\mathcal{D}$).

Corollaire : Par tout point A non sur ($\mathcal{D}$) passe une perpendiculaire et une seule.

Cette notion sera reprise en page 11.

Définition

On appelle cercle $(\mathcal{C})$ de centre Ω et rayon $r > 0$ l'ensemble des points M situés à la distance r de Ω. D'après l'axiome n°2, un cercle n'est pas vide.

D'après ce qui précède, deux cercles (C_1) et (C_2) ont 0, 1 ou 2 points d'intersection.

On admettra de même qu'un cercle et une droite ont 0, 1 ou 2 points d'intersection.

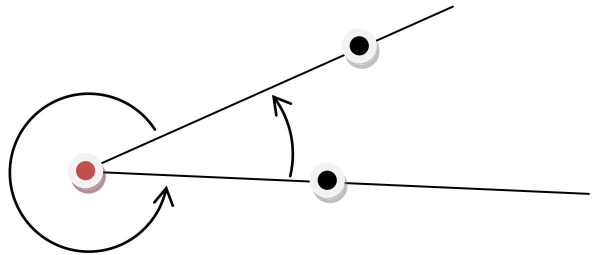
Terminologie : Lorsque les deux cercles (resp. un cercle et une droite) ont un seul point d'intersection, on dit qu'ils sont tangents.

Notion d'angle

Ce qui suit est très *practico-pratique*. Abandonnant une présentation axiomatique, on accepte de se mettre sous l'égide du "voir".

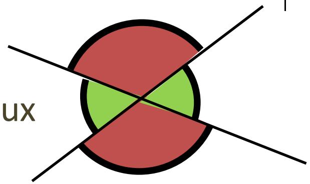
Secteurs angulaires

Soient trois points O, A, B distincts tel que O appartienne au segment]AB[. Les demi-droites [OA) et [OB) définissent deux secteurs angulaires, l'un saillant, l'autre rentrant.



- On admet que l'on peut comparer deux secteurs angulaires par transport de l'un d'entre eux puis superposition.
- On admet que l'on peut ainsi construire la notion d'angle. La mesure des angles n'est pas encore présente !

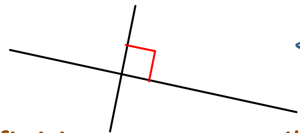
Théorème



2 droites non parallèles définissent quatre secteurs angulaires, égaux deux à deux (angles opposés par le sommet).

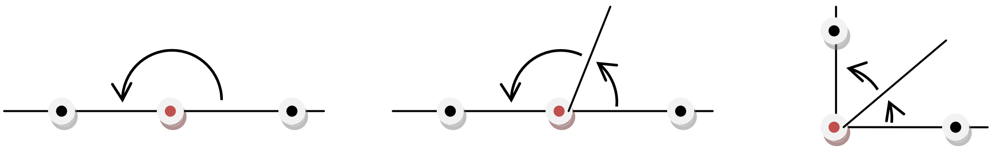
Définition

Lorsque deux droites non parallèles définissent quatre secteurs angulaires, tous égaux, on dit que les droites sont perpendiculaires et on appelle angle droit l'angle associé à ces quatre secteurs égaux.



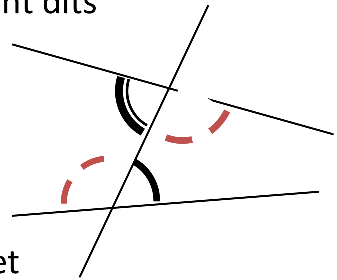
On admettra que cette définition est compatible avec celle donnée en page 4.

<ins>Notions dérivées</ins> : angle plat, angles supplémentaires, angles complémentaires.



Angles alternes-internes :

Deux angles formés par deux droites coupées par une sécante sont dits angles alternes-internes si :



- ils sont situés de part et d'autre de la sécante ;
- ils sont situés entre les deux droites ;
- ils ne sont pas angles adjacents.

On peut de même définir la notion d'angles alternes-externes et celle d'angles correspondants.

Théorème

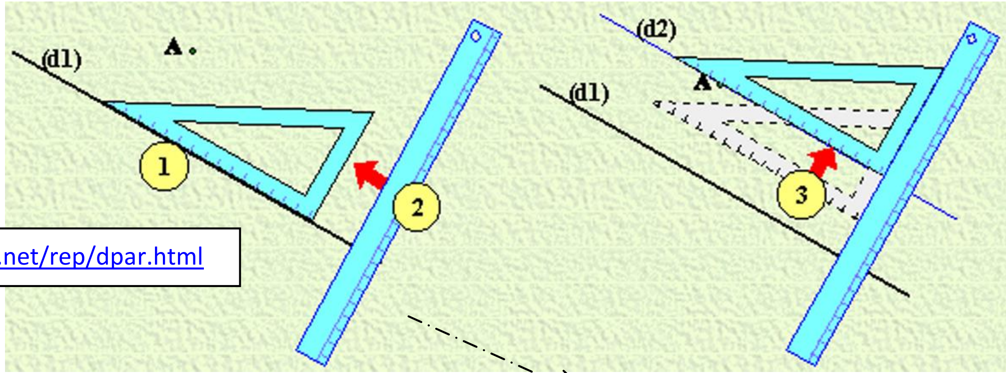
Deux droites sont parallèles si et seulement si elles forment avec n'importe quelle sécante des angles alternes-internes égaux, ou aussi bien, des angles alternes-externes égaux, ou encore des angles correspondants égaux.

Corollaire : deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles.

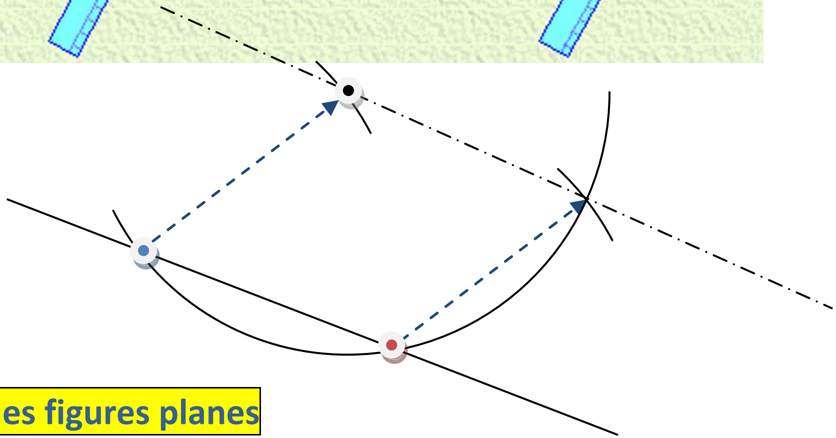
Construction d'une parallèle à une droite donnée passant par un point donné :

- 1/ en faisant glisser une équerre
- 2/ à l'aide du compas.

{Voir page suivante}



http://mathsgeo.net/rep/dpar.html



Conséquence : géométrie des figures planes

- On peut définir des figures : triangles, dont isocèle, équilatéral, rectangle, quadrilatère, dont parallélogramme, losange, rectangle ...

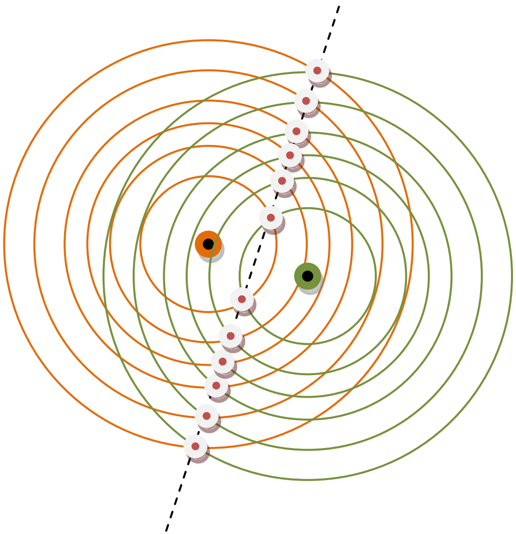
Médiatrice

Problème :

- Quel est l'ensemble des points équidistants de 2 points A et B donnés ($A \neq B$) ?

Cet ensemble n'est pas vide : il contient au moins le milieu du segment [AB].

Cet ensemble est infini : il contient l'ensemble des intersections des cercles centrés respectivement en A et B et de même rayon 2 à 2, soit r avec r > AB/2.



On accepte :

Solution du problème

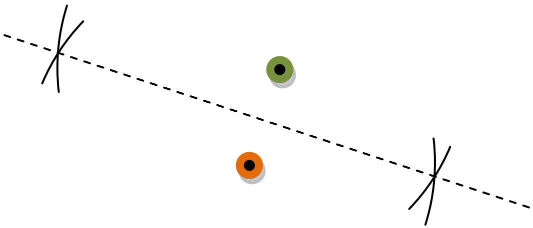
L'ensemble des points équidistants de 2 points A et B donnés (A $\neq$ B) est appelée médiatrice du segment [AB]. C'est une droite. **De plus** : Cette droite partage le plan en deux demi-plans, dont il est la frontière, celui des points plus près de A que de B et celui des points plus près de B que de A.

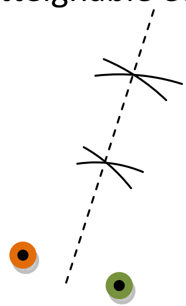
La médiatrice apparaît comme :

- la droite perpendiculaire à la droite (AB) et passant par le milieu de [AB] ;
- l'axe de symétrie du segment [AB].

Construction

Au compas uniquement, sauf si le milieu est facilement atteignable et qu'on a le droit d'utiliser l'équerre.



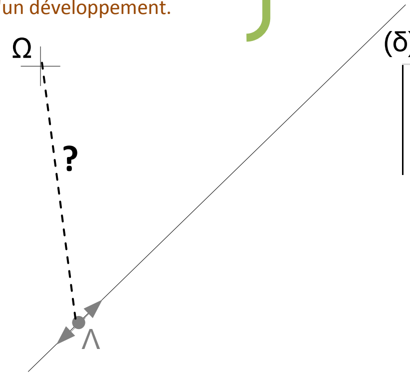


Notion de distance d'un point à une droite

Cette notion a déjà été abordée rapidement page 4.
Il s'agit donc ici d'un développement.

Axiome n°8

Soit un point A non sur ($\mathcal{D}$), et M un point variable sur ($\mathcal{D}$).
Alors il existe un point M sur ($\mathcal{D}$) qui minimise la distance AM, et ce point est unique.



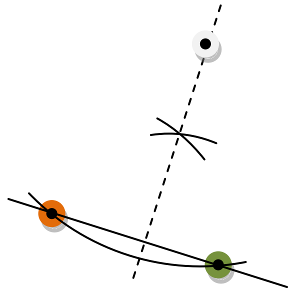
Définition

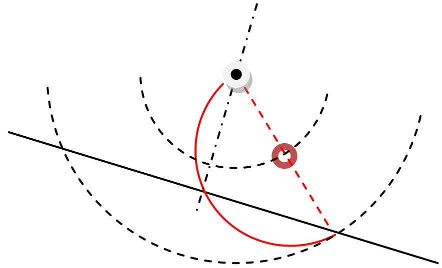
La distance minimale présentée dans l'axiome n°8 est appelée distance du point A à la droite ($\mathcal{D}$). On note D(A, ($\mathcal{D}$)) cette longueur.

Propriétés

- Par un point A, on peut mener une perpendiculaire à ($\mathcal{D}$) et une seule. {Que le point A appartienne à ($\mathcal{D}$) ou non est sans incidence ici.}
- La perpendiculaire à ($\mathcal{D}$) passant par A coupe ($\mathcal{D}$) en un seul point. Il est confondu avec A si A est sur ($\mathcal{D}$).
- Le point d'intersection s'appelle la projection orthogonale de A sur ($\mathcal{D}$). On dit aussi le projeté orthogonal.
- Si H désigne ce projeté, alors AH réalise la distance de A à ($\mathcal{D}$).

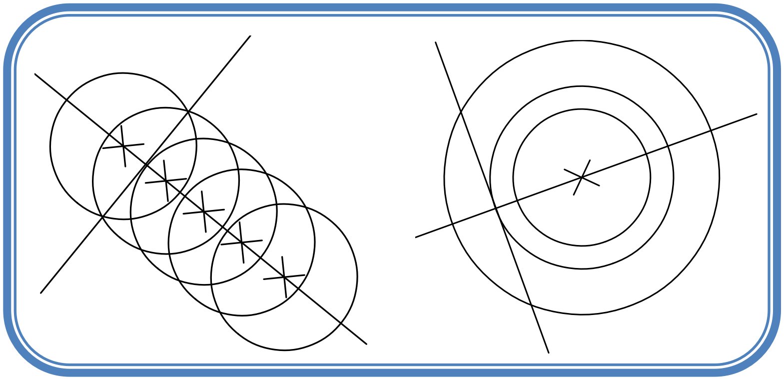
Construction





Cercle tangent à une droite

- Soit $(\mathcal{C})$ un cercle de centre Ω et rayon R et $(\mathcal{D})$ une droite. On appelle D la distance de Ω à la droite $(\mathcal{D})$. 3 cas.



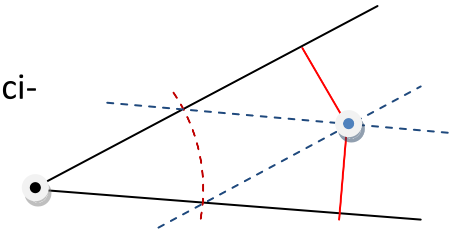
  - Cas n°1 : R < D Intersection vide.
  - Cas n°2 : R = D 1 seul point d'intersection, le cercle $(\mathcal{C})$ est dit tangent à la droite $(\mathcal{D})$.
  - Cas n°3 : R > D 2 points d'intersection, disons U et V. Le projeté orthogonal de Ω sur (D), soit H, est le milieu du segment [UV]. La droite (ΩH) est médiatrice de [UV].

Bissectrice

Problème :

- Quel est l'ensemble des points équidistants de 2 demi-droites [SA) et [SB) données (A, B, S étant trois points distincts deux à deux) ?

Cet ensemble n'est pas vide, il est d'ailleurs infini ! La figure ci-contre montre comment produire autant de points que l'on veut, répondant à la question.
D'autres productions -via la médiatrice- sont possibles.



- On accepte :

Solution du problème

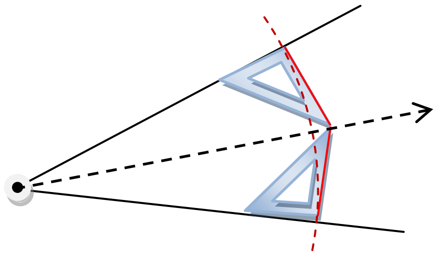
L'ensemble des points équidistants de 2 demi-droites [SA) et [SB) données (A, B, S étant trois points distincts deux à deux) est appelée bissectrice du secteur <[SA), [SB)>, on dit aussi de l'angle ASB^. C'est une demi-droite issue de S.
Plus : On peut partager le secteur angulaire en deux zones, celle dans laquelle les points sont plus près de [SA) que de [SB) et celle dans laquelle les points sont plus près de [SB) que de [SA). On obtient deux secteurs angulaires superposables, ayant pour frontière commune, la bissectrice.

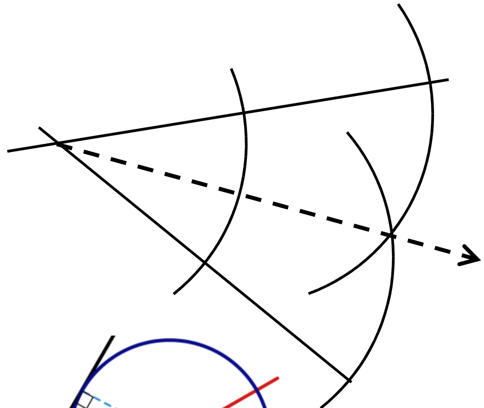
La bissectrice apparaît comme :

- l'axe de symétrie du secteur angulaire <[SA), [SB)> ;
- la médiatrice d'un segment [UV] avec U ∈ [SA), V ∈ [SB) et SU = SV.

Construction

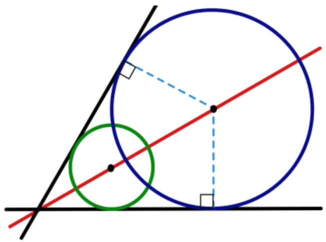
Au compas uniquement ! Si on y est autorisé, on peut recourir à l'équerre, mais l'expérience montre que le tracé est moins précis.





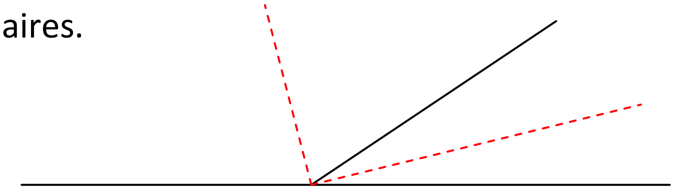
Corollaire

La bissectrice [Oz) d'un angle xOy est le lieu des centres des cercles tangents aux côtés [Ox) et [Oy) de cet angle.



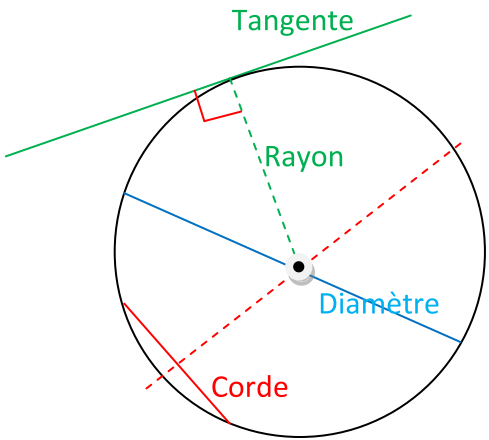
Secteurs angulaires adjacents

<u>Constat</u> : les bissectrices sont perpendiculaires.

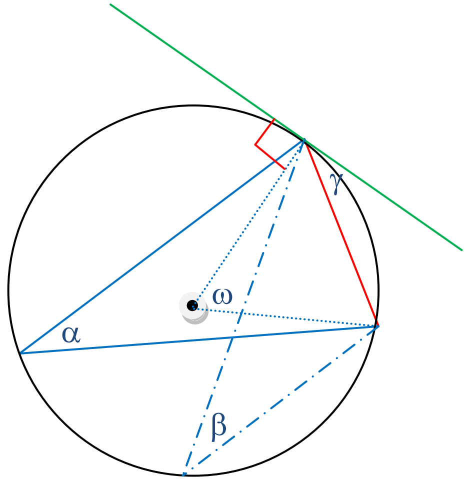


Géométrie du cercle

Vocabulaire



La médiatrice d'une corde est un diamètre !



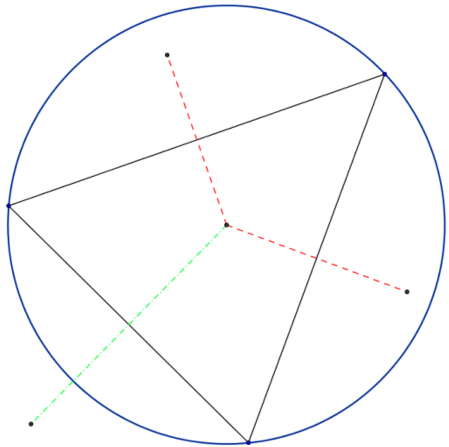
Angle inscrit : exemples α ou β ou γ ;

Angle au centre : ω.

Théorème : l'angle au centre est le double de l'angle inscrit.

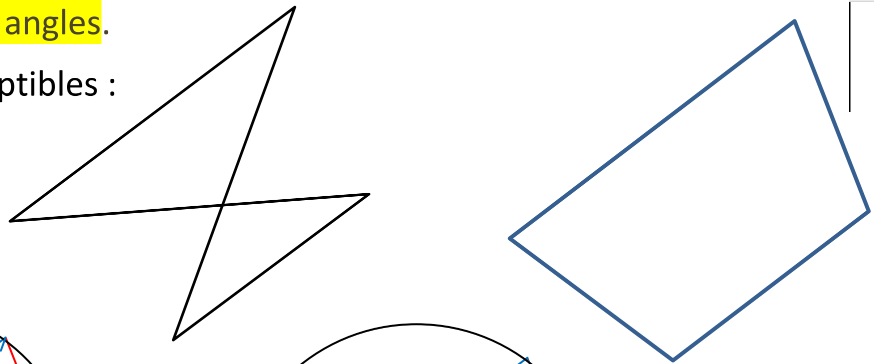
Cercle circonscrit à un ensemble de points

- Soit A_1, A_2, … A_n un ensemble fini de points, tous distincts. Un cercle ($\mathcal{C}$) est circonscrit à ces points si et seulement si tous les points en font partie.
- Analyse pour 2 points : il existe une infinité de cercles "circonscrit" à 2 points A et B. Leurs centres sont sur la médiatrice du segment [AB].
- Analyse pour 3 points : il existe un et un seul cercle circonscrit à trois points A, B, C. Son centre est obtenu comme intersection de deux médiatrices de cotés du triangle ABC. {2 médiatrices suffisent ! Cf. infra Géométrie du triangle.}

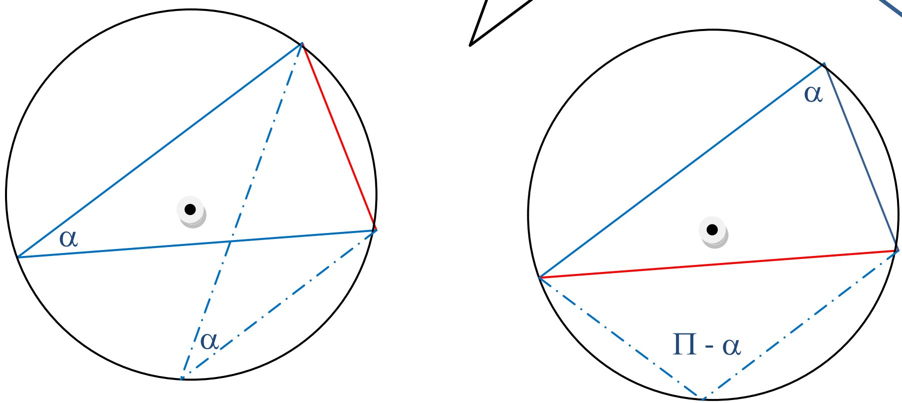


- <u>Analyse pour 4 points</u> : il existe au plus un cercle circonscrit à 4 points A, B, C, D.
  La condition nécessaire et suffisante est que les points soient cocycliques (Tautologie).
  Un critère est l'observation des angles.

Ces deux quadrilatères sont inscriptibles :

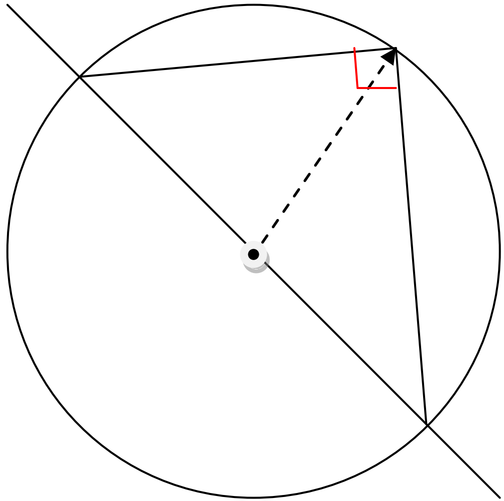


Car :



- Cas particulier n°1 : Polygone régulier à n cotés.
  Un polygone régulier est un polygone équilatéral (tous ses côtés ont la même longueur) dont, de plus, tous les angles ont même mesure.
  Un polygone régulier est soit un polygone convexe, soit un polygone étoilé.
  Les polygones réguliers sont toujours inscriptibles dans un cercle.
  Polygones réguliers typiques : triangle équilatéral, carré, pentagone, hexagone, octogone, dodécagone ; seul le pentagone, dans la famille énoncée, fournit un étoilé intéressant.

Cas particulier n°2 : triangle rectangle.



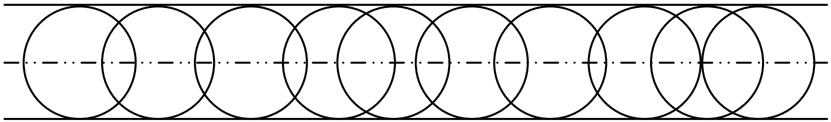
Théorème

- Un triangle rectangle est inscriptible dans un demi-cercle : son hypoténuse est le diamètre de ce demi-cercle.
- Réciproquement, si l'un des cotés d'un triangle est diamètre du cercle circonscrit, alors ce triangle est rectangle (en le sommet opposé à ce coté).

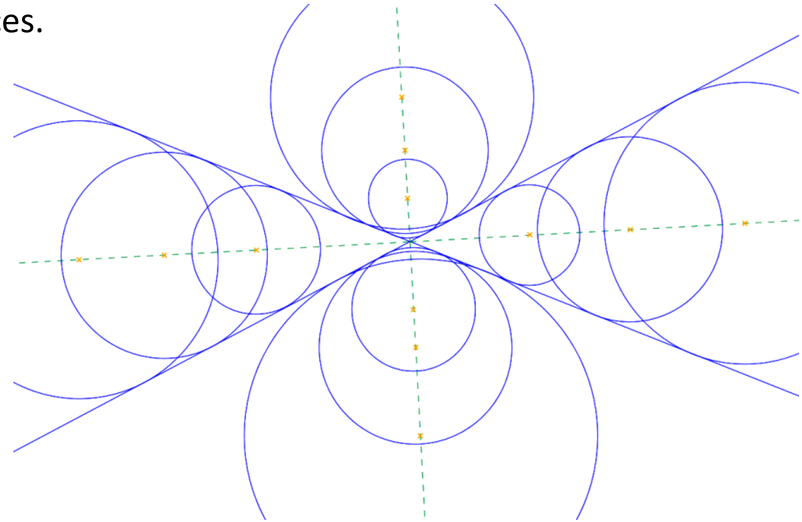
Cercle tangent à un ensemble de droites

<u>Analyse pour 2 droites</u> : il existe une infinité de cercles tangents à 2 droites $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$.

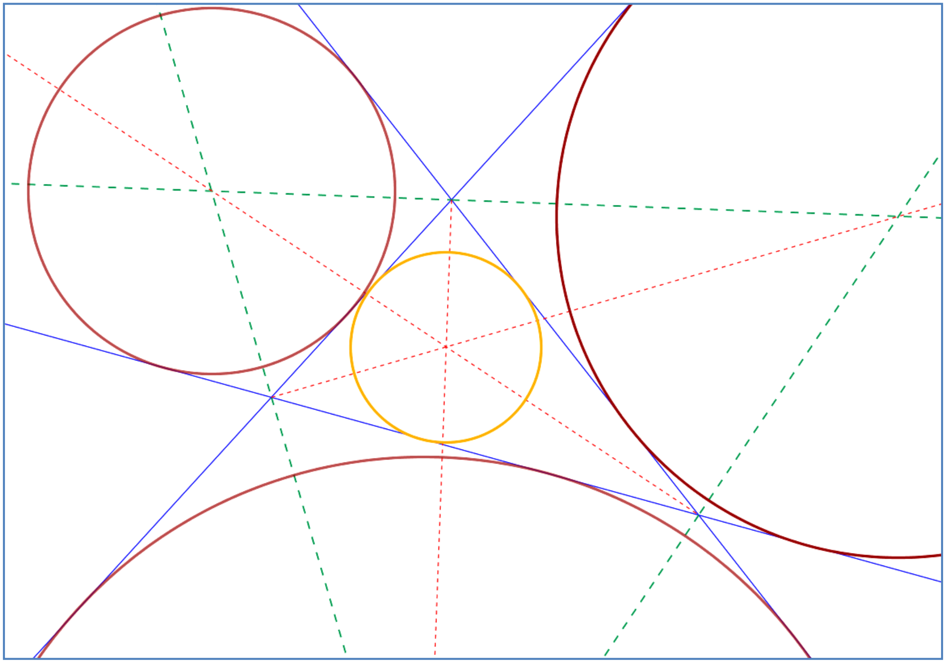
- Si les droites sont parallèles :



- Si les droites ne sont pas parallèles :
  Elles définissent 4 secteurs angulaires égaux deux à deux. D'où deux bissectrices (au sens de bissectrices de droites) perpendiculaires l'une à l'autre. Les centres des cercles solutions sont sur ces bissectrices.

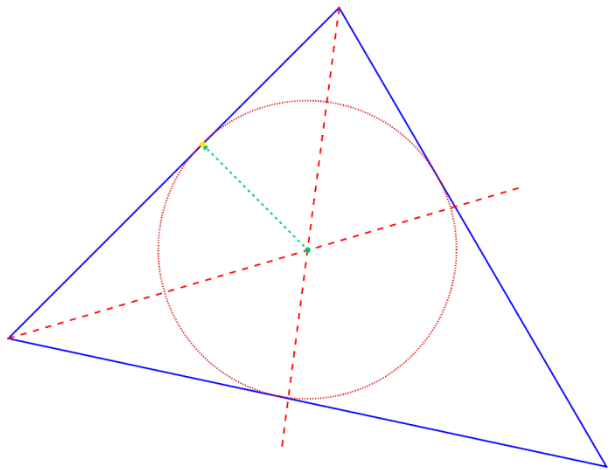


- <u>Analyse pour 3 droites</u> :
  Quand les droites sont concourantes ou parallèles, on obtient une infinité de cercles.
- Dans le cas où deux des droites sont parallèles, on obtient deux cercles.
- Dans le cas où les trois droites délimitent un "vrai" triangle, on obtient quatre cercles.



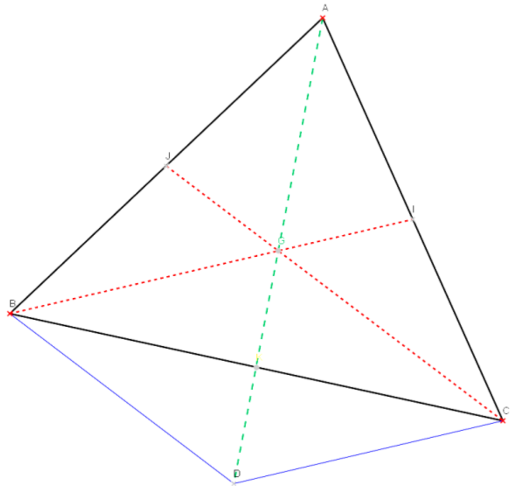
Géométrie du triangle

- Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes. (Preuve facile en revenant à la définition donnée supra).
  Le point d'intersection est le centre du cercle circonscrit.
- Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes. (Preuve facile en revenant à la définition donnée supra).
  Le point d'intersection est le centre du cercle inscrit.



- Les trois médianes d'un triangle sont concourantes.
  Le point de concours est le centre de gravité.

  Vers une preuve :



- On considère deux médianes. Elles se coupent au point G.
- On appelle D le symétrique de A par rapport à G. En profitant du théorème de la droite des milieux (Thalès appauvri) dans les triangles ABD puis ADC, on montre que le quadrilatère BGCD est un parallélogramme.
- Comme les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux, la droite (AG) est médiane dans le triangle BCG.

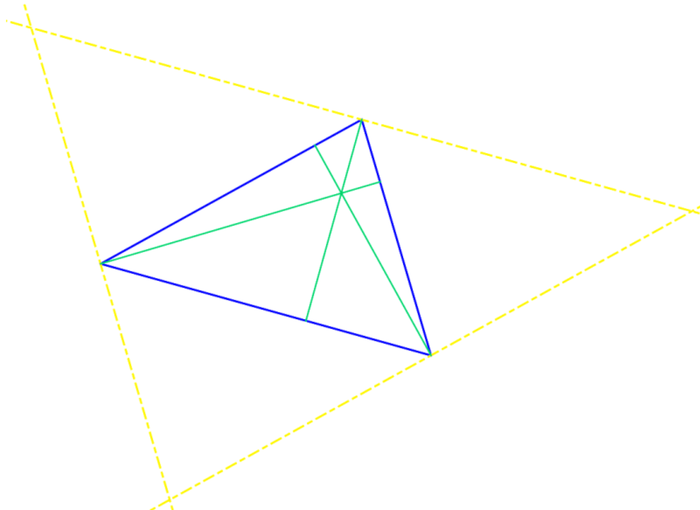
  Remarques :

- La preuve est dissymétrique en quelque sorte, si on la compare à celle concernant la *concourance* des médiatrices ou des bissectrices : ce qui permet de gagner le résultat n'est pas une application immédiate des qualités des médianes déjà en place.
- La preuve fait appel à des propriétés (voire des théorèmes) qui sont des conséquences -lointaines- de ce qui a été exposé précédemment.

- Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.
  Le point de concours est appelé orthocentre.
  Mais c'est le centre de rien du tout ...

  Vers une preuve :

- On fait apparaître les parallèles aux cotés des triangles passant par les trois sommets.
- On obtient ainsi un triangle dont les cotés sont deux fois plus grands. On fait appel ici à un savoir sur les parallélogrammes, non encore développé ici
- Ne reste plus qu'à constater que les hauteurs du premier triangle sont devenues des médiatrices dans le second ... On peut conclure !



(provisoire).