Didactique appliquée : Qu'est-ce qu'une notion ? Corrigé

1/ Compétences et objectif(s)

D'après Corse 98

1 - Réalisez vous-même le travail proposé. →

3	3	4	5
6	■	0	1
■	1	0	5
7	3	■	1

2 - Cernez les compétences attendues des élèves.
▷ Compétences transversales : connaître le principe du jeu (en s'appuyant sur les mots croisés) savoir décoder les énigmes, connaissances culturelles (le dè).
▷ Compétences dans le calcul multiplicatif et divisif.
▷ A cela on doit ajouter des connaissances : sur la numération, sur les critères de divisibilité.

3 - Précisez le ou les objectifs de l'enseignant ayant proposé ce travail.
▷ Il s'agit certainement d'un objectif de vérification de connaissances (on est en fin d'année), peut-être dans le cas d'un rallye-maths.

D'après Rennes 95

1- Traitement du travail proposé aux élèves.
▷ La réponse au ? est : Année de naissance de Mickey = 1929.

2 - Compétences attendues des élèves.
▷ Savoir lire une consigne écrite ;
▷ Savoir distinguer chiffre des et nombre de, maitriser la numération de position ;
▷ Compétences d'ordre contractuel : savoir circuler dans un labyrinthe (on suit les chemins, on ne saute pas d'une case à n'importe quelle autre), accepter de jouer le jeu (on ne comprend l'intérêt du labyrinthe que lorsqu'on est arrivé sur l'enveloppe, pas tant fermée que cela d'ailleurs).

3- La fiche élève proposée semble-t-elle correspondre à ces objectifs ?
▷ Les objectifs énoncés correspondent à des connaissances. L'objectif de l'enseignant est d'en vérifier la disponibilité.
▷ Le 1er objectif (connaissance des nombres supérieurs à 1 000) correspond à :
¤ Savoir les écrire, les lire (alias les nommer), en structurant par tranches de 3 chiffres, les décomposer selon les puissances de 10 (de 10^3 ?) d'où l'opposition entre nombre de et chiffre des, de leur étendre les propriétés arithmétiques déjà connues (pairs, multiples …).
¤ Les différents éléments de savoir sont mobilisés, bien que de façon non systématique.
▷ Le second objectif (faire comparer des nombres) renvoie à :
¤ savoir les ranger, les encadrer, éventuellement trouver leur écart ou évaluer leur rapport.
¤ la situation proposée propose une décomposition (via des milliers) pour définir un encadrement.
▷ Ce second objectif ne semble pas vraiment traité. Il se peut que la suite de la leçon, non fournie ici, complète le travail engagé.

2/ Procédures

D'après Rouen 92

1-Caractérisation des procédures utilisées par les enfants.
▷ On est amené à balayer séparément les réponses à chacun des 2 problèmes posés. Ces deux problèmes ne sont d'ailleurs pas de même nature, voir réponse à Q2.
▷ Analyse P1
Antoine : rechercher du plus gros multiple de 6 puis soustraction.
Brice : même recherche, mais reste présenté par une complémentation.
Cécile : même recherche, mais n'exhibe pas directement la bonne solution.
Emmanuel : prégnance du modèle multiplicatif + erreur sur les données (9 =*n* œuf ?).
Emmanuelle : incompréhension de la situation.
Julie : comme Emmanuelle.
Julien : recherche par simulacre (procédure imagée)

Maeva C : comme Cécile.
Maeva L : comme Julie.
Marion : comme Julien.
Céline : soustractions itérées avec contrôle d'arrêt.
Valérie : comme Maeva et Julie.
▷ Synthèse pour P1
38% des enfants n'ont pas vu que la situation n'était pas du type multiplicatif (donc n'ont certainement pas reconnu le modèle) : Emmanuel, Emmanuelle, Maeva L, Julie, Valérie.
15% font appel à des procédures imagées donc primitives : Julien, Marion. On pourrait y adjoindre Céline qui fait appel à une procédure progressive (ensemble de soustractions) et même Cécile et Maeva C. dans la mesure où les deux essais affichés ne sont peyt-être qu'une partie seulement du travail réellement élaboré. Cet ensemble d'enfants représentent 38% de l'effectif.
23% des enfants ont reconnus le modèle des approches par multiples : Antoine, Brice, Damien.
▷ Analyse P2
On ne s'occupe pas d'Emmanuelle, ni de Maeva L, Valérie et même Julien.
En revanche, Emmanuel répond correctement ainsi que Julie (avec début d'un dessin).
Antoine : appel direct au produit 8x20.
Brice : recherche des multiples 8x15 puis 8x20.
Cécile : comme Brice mais 8x10 puis 8x20.
Emmanuel : comme Antoine.
Julie : produit une écriture multiplicative; noter le début de simulation.
Julien : essaye de reprendre sa technique de P1 mais la taille des nombres ne lui permet pas de poursuivre.
Maeva C : recherche de multiples avec très grande prise de risque.
Marion : comme Antoine.
Céline : semble avoir repéré une situation de division. Procédure progressive dans le champ de la division.
▷ Synthèse pour P2
23 % de l'effectif n'a pas perçu que la situation était dans le champ de la multiplication : Emmanuelle, Maeva, Valérie. On peut y ajouter Julien, d'où un score de 30%.
38% de l'effectif trouve la réponse par une procédure progressive fondée sur la multiplication : Brice, Cécile, Julie, Maeva C, Céline.
31% fournissent directement le résultat : Antoine, Damien (réponse sous 2 formes), Emmanuel, Marion. Ces élèves ont bien repéré le modèle.

2- Autres procédures pouvant être proposées :
▷ L'expert identifie de suite que le problème P1 est un problème de partage équitable avec reste. Le savoir associé est donc la division euclidienne : 45 = 6x7 + 3.
▷ Quant au second problème, il s'agit d'un problème de division-partition (on cherche un nombre de parts, par opposition au problème de division-quotition où l'on cherche la valeur d'une part). La relation de 16 (160 = 10x16) à 8 facilitait cette identification.

3- Classement des procédures de résolution de ces problèmes.
▷ Voir les synthèses pour P1 et pour P2 dans la réponse à la question 1.

D'après Montpellier 98

I°) Réponse par un tableau :

	Signification relative à la mesure	Réponse
339/8	C' est la valeur exacte de la mesure.	339/8 km
42,375	C'est l'écriture virgulaire de la fraction 339/8 qui est bien décimale.	42,375 km
42	C'est la valeur entière approchée par défaut de la mesure en km, ou la valeur entière la plus proche, obtenue par exemple comme quotient entier de la division.	42 km
42,37 et 42,38	Ce sont les nombres décimaux ayant deux chiffres après la virgule qui sont les plus proches de la mesure en km.	42,370 km 42,380 km
42,3	C'est la valeur obtenue par troncature à la première décimale du quotient fourni par la division, ou une valeur approchée au dixième près par défaut	42,300 km
42,5	C'est une valeur approchée à cinq dixièmes près.	42,500 km

▷ Les réponses qui correspondent le mieux à la consigne sont donc 339/8 km et 42,375 km.

3/ Connaissance première vs connaissance experte / Notion

{Suite de Montpellier 98}

2°) ▷ Thème principal : c'est celui sur lequel les élèves sont invités à s'exercer, soit :
Quotient décimal exact et approché de deux entiers, au dixième, au centième, au millième, sens et technique de calcul de ces quotients.
▷ Définitions possibles :
Le quotient décimal exact de deux entiers a et b n'existe pas toujours. Lorsqu'il existe, c'est le nombre q tel que a = bq.
▷ Généralisation :Le quotient décimal approché au dixième près (respectivement au centième, au millième) est le nombre décimal ayant un (respectivement deux, trois) chiffres (non nuls) après la virgule qui s'approche le plus du quotient exact de deux entiers.
▷ Démarche concrète : Pour le trouver, il faut continuer la division jusqu'à ce que le quotient ait un chiffre de plus que le nombre demandé, et arrondir.
▷ Remarque : le thème principal participe du Savoir sur la division. La définition passe par des connaissances et des savoir-faire.

4°) Procédures que peuvent utiliser des élèves pour répondre à la question de l'activité de découverte.
▷ PI : les élèves effectuent des mesures sur la carte et convertissent en fonction de l'échelle. N'est possible que si la conversion est simple. La réponse la plus précise possible dépend des possibilités et des erreurs de mesure inévitables.
▷ P2 : Les calculs peuvent être réalisés en repérant à quelle unité de longueur correspond la précision qui a du sens dans la situation, en exprimant les longueurs avec cette unité (ici des m), puis en faisant une division euclidienne classique. La réponse est alors donnée avec l'unité choisie (ici 42 375 m).
▷ P3 : L'élève détermine le type de nombre décimal qui a du sens selon lui dans la situation : avec trois chiffres après la virgule par exemple s'il s'agit de mètres. Les calculs sont alors réalisés par tâtonnement pour trouver un encadrement de 329 par deux produits du nombre 8 avec deux nombres décimaux ayant un, puis deux, puis trois chiffres avec la virgule et différant entre eux respectivement de 10^{-1} , de 10^{-2} , de 10^{-3} ; On choisit enfin celui dont le produit par 8 est le plus proche de 329. Cette procédure est évidemment favorisée si les élèves disposent d'une calculatrice.
▷ Remarque : on voit bien ici comment des connaissances vont permettre de résoudre -localement- le problème proposé. Mais la résolution ne débouchera pas sur le gain nécessaire d'une nouvelle connaissance.
▷ Les connaissances mises en jeu varient selon les procédures.
¤ Pour P1 et P2, connaissances sur les mesures et les conversions entre unités, éventuellement savoirs dans le champ de la proportionnalité.
¤ Pour P3, connaissances sur les décimaux jusqu'à l'ordre 3 y compris les algorithmes de calcul. P3 se rapproche évidemment de la procédure experte.

5°) ▷ Depuis le premier exercice les élèves qui utilisent la division sont en présence de divisions qui se terminent (rapidement) et d'autres, dont le reste n'est pas nul, et dont le professeur sait qu'elles ne se terminent pas.
▷ L'affirmation « certaines divisions ne se terminent pas » dans l'exercice 5 n'a probablement pas le même sens pour un professeur et pour un élève :
¤ Pour un élève, cela signifie d'abord qu'une telle opération ne se termine pas dans les conditions de calcul habituel, c'est à dire après avoir poussé jusqu'à deux ou trois chiffres après la virgule.
¤ On peut attendre d'un élève (non exceptionnel) qu'il déclare que la division ne se terminera jamais par ce qu'elle ne se termine pas dans les conditions usuelles, et qu'il comprend ainsi la demande du maître.
▷ En attendre plus ne relève pas d'un exercice, mais d'un véritable problème, au sens d'une situation-problème, qui débouchera sur le repérage et l'explication du phénomène de période.
▷ Le savoir mathématique associé est donc celui de la forme de l'écriture virgulaire d'un nombre en fonction de sa nature. Ce savoir est forgé au collège, pas à l'école primaire.
▷ Le choix des nombres doit se faire pour obtenir une période de longueur inférieure ou égale à trois chiffres, ceci en vue d'obtenir une répétition observable dans le contexte de nombres qui ont un sens pour les élèves. On peut, par exemple, profiter de divisions par 3 ou 9 avec un dividende non multiple de 3. On peut aussi faire appel au diviseur 11 ou au diviseur 13 …

D'après Rouen 99

1-Résolution de la question 3 de la partie Découverte.

Nombre :	571	1 000	10 000	10^5	3 597	5 324
N° colonne :	4	1	1	1	8	5

▷ Méthode experte : congruence modulo 9, qui passe ici par la somme des chiffres du nombre avec réitération éventuelle du procédé.
▷ Méthode concrète (que peuvent utiliser les élèves) : repérer que dans la division par 9 on obtient comme reste le numéro de la colonne; ou bien repérer que le test par 9 s'applique.

2-L'appellation 'Découverte' semble-t-elle justifiée ?
▷ Les vocables "Découverte", "Je découvre" sont toujours sujets à caution : on ne peut découvrir que ce qu'on ne connaît pas. Ce qui laisserait supposer que le maître est sûr qu'aucun des élèves ne connaît la propriété visée avant qu'il ne fasse la leçon. Hypothèse peu probable, surtout au CM2.
▷ Par ailleurs, pour qu'il y ait découverte, il faut qu'il y ait matière à découvrir. Ici, on propose un problème : l'élève doit placer des nombres dans un tableau. Il y a de nombreux nombres à placer.
¤ La première consigne place les élèves en situation de réussite (ils peuvent prolonger le tableau).
¤ La deuxième demande une anticipation (qu'il faudra construire).
¤ La troisième amène à formuler une méthode. Voir méthode concrète ci-dessus.
¤ Ceci peut déboucher sur l'exploitation du critère de reconnaissance d'un multiple de 9. L'utilisation du mot "découverte" paraît justifiée.

3 -Comment l'enseignant préparant son cours va-t-il s'y prendre ?
▷ L'enseignant peut s'appuyer sur le livre du maître. Il y trouvera explicitation de la notion traitée et du protocole imaginé par les auteurs du manuel (du moins dans les bons manuels - et c'est le cas ici).
▷ L'enseignant pressé préparera un tableau sous Excel, au risque de ne pas mettre en place la bonne méthode pour répondre aux consignes 3 et 4.
▷ L'enseignant sera vigilant et préparera des messages-type comme demandé par la situation de découverte.
¤ M1 *Je divise le nombre par 9, je regarde le reste : le nombre est dans la colonne qui commence par le reste*. Ou :
¤ M2 *Je cherche le multiple de 9 juste avant le nombre donné : je place ce multiple dans la colonne qui commence par O ; puis je complète la ligne jusqu'au nombre donné*. Ou :
¤ M3 *Je fais la somme des chiffres du nombre, et je recommence jusqu'à obtenir un nombre de la première ligne ; le nombre donné est dans la colonne de ce nombre.*

4-Procédures mises en œuvre des élèves de CM2 :
▷ Très vraisemblablement, les élèves vont commencer par compléter le tableau de la gauche vers la droite, ligne après ligne. Il est possible qu'ils percutent sur les résultats de la deuxième colonne (1, 10, 19) puis de la première (0, 9, 18, 27).
▷ A ce moment-là, les élèves réinvestiront une situation de type division (courses à partir d'une position r avec sauts de p).

Connaissance débusquée :
▷ Si on s'appuye sur l'ensemble de l'annexe fournie, on note qu'il est proposé aux élèves de ranger les entiers par classes selon leur reste dans la division par un nombre donné.
▷ La première classe est toujours celle de 0. Il n'y a pas plus de classes que le diviseur proposé.
▷ Il existe un moyen simple pour savoir si un nombre donné se trouve dans la classe 0, c'est le critère de divisibilité par 2, par 3, par 5, par 9.

Notion sous-jacente à cette leçon :
▷ C'est évidemment la théorie des congruences qui permet d'expliquer les phénomènes observés. Il s'agit d'une théorie savante, qui participe du savoir mathématique, hors de portée des élèves du primaire.

D'après Nice 94

1 -▷ Procédures pour remplir le nuage dans l'activité 1 :
¤ compter de proche en proche en récitant la comptine numérique (risque d'erreur + problème d'interprétation du dit).

¤ former des paquets de 10, puis les unités excédentaires (le cartouche à droite "Après" permet de valider le résultat énoncé).
¤ profiter de ce cartouche pour traduire 3 boites pleines et 6 billes en 30 + 6 soit 36 (les enfants acceptent que picbille et dédé ont bien fait leur travail).
¤ Coder directement 3 boites pleines et 6 billes -> 36 (le principe de la numération décimale est comprise, du moins à l'ordre 1).
▷Intention de l'auteur :
Faire mettre en relation le fait que d dizaines (ici d boites de 10) et u unités (u <10) s'encode par du.

2 -▷ Procédures pour remplir les nuages dans l'activité 2 :
¤ L'élève est amené à circuler de case en case en égrenant et en mémorisant les successeurs.
¤ L'élève n'inscrit que la valeur mémorisée que si un nuage est disponible.
¤ Des procédures accélératrices sont possibles.
Un certain nombre de nuages correspondent à des cases juste après le double trait : il s'agit donc du premier d'une nouvelle dizaine (cette ségrégation est d'ailleurs très discutable ; c'est une mauvaise solution pour se débarrasser du 0 en début de la droite numérique).
Certains nuages correspondent alors à des successeurs de 1 ou 2 près. L'élève peut compléter par recopie du chiffre des dizaines et ajustement du chiffre des unités.
Enfin, certains nuages ne sont rien que les prédécesseurs des nouvelles dizaines (cases avant un double trait). Le remplissage est plus délicat. Idéalement il devrait s'inspirer d'une démarche de compteur.
▷ Intention de l'auteur :
Il s'agit de compléter la bande numérique. On est donc dans le champ de l'ordinal.

3 -▷ Pourquoi ajouter le nombre 26 :
¤ 26 et 62 s'écrivent avec les mêmes chiffres mais en ordre inversé. En ajoutant ce nombre, on montre l'importance de la position des chiffres dans l'écriture : le "2" dans 62 ne vaut pas grand chose quand le "2" vaut bien plus ! Certains enseignants pensent que si la dyslexie est détectée à temps, ce genre de confusion ne se produit pas et qu'il n'y a pas lieu de prévoir un travail systématique …

4 -▷ Notion travaillée :
¤ Numération décimale de position (numération chiffrée) en relation avec la numération parlée (mais pas écrite). La notion est travaillée sur l'intervalle [40, 70]. Son lien à la numération scripturale n'est pas traité.

Expérience

<u>Question</u> : "A quoi peut-on reconnaître qu'un élève a acquis la notion de droites perpendiculaires ?"
▷ Cette situation est proposée par Charnay-Mante dans leur de préparation au CRPE chez Hatier. Les lignes ci-dessous s'inspirent fortement de ce manuel.
▷ Premières réponses (évidentes) :
¤ (1) Si l'élève sait tracer des droites perpendiculaires.
¤ (1-bis) Si l'élève sait tracer une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné.
¤ (2) Si l'élève sait reconnaître que deux droites sont perpendiculaires (à vue d'œil, avec un instrument).
▷ Réponses (moins spontanées) :
¤ (3) Si l'élève sait utiliser les expressions « droites perpendiculaires », « droite perpendiculaire à la droite ... passant par le point ... ».
¤ (4) Si l'élève sait utiliser le symbole « ⊥ » et le marquage de l'angle droit sur un dessin pour signifier que deux droites sont perpendiculaires.
¤ (5) Si l'élève connaît une définition de deux droites perpendiculaires, par exemple :« Deux droites sont perpendiculaires si elles déterminent quatre angles droits ».
¤ (6) Si l'élève connaît la propriété : « Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles. ».
▷ Réponses après recherche en groupe :
¤ (7) Savoir que des droites sont perpendiculaires permet :
(7a) de décrire certaines configurations,
(7b) de construire des maquettes, pu des plans »,
(7c) de reproduire certaines figures »,
(7d) de localiser certains points.

Question : "préciser ce qu'est un concept - ou une notion en mathématique."

▷ Voici un réponse constructiviste :

¤ Un concept peut se caractériser par quatre aspects :

A 1 : ensemble des savoir-faire (procédures, techniques...) associés au concept (Cf. réponses 1 et 2) ;

A 2 : ensemble des formes langagières (vocabulaire, expressions, symboles) qui permettent de l'évoquer et d'expliciter propriétés et procédures (Cf. réponses 3 à 6) ;

A 3 : ensemble des propriétés, des définitions qui le caractérisent (Cf. réponses 7) ;

¤ A ces trois aspects, il faut ajouter :

A 4 : ensemble des problèmes que le concept permet de résoudre efficacement.

4/ Transposition didactique

D'après Grenoble 95

1 -Intention des auteurs dans chaque présentation.

▷ Maths en Flèche CM1 Nathan 1993 :

¤ Après une évocation des écritures virgulaires issues de la vie courante, les auteurs présentent les décimaux comme des fractions particulières. Les auteurs ont, sans doute, déjà travaillé sur de telles fractions dans les pages précédentes, et ce qui les préoccupe c'est uniquement de basculer dans les écritures à virgule.

▷ Apprentissages Mathématiques CM Nathan 1990 :

¤ les décimaux sont introduits comme moyen d'exprimer des mesures de longueur faisant intervenir plusieurs unités (m et cm etc.).

2 -Problèmes ultérieurs quant à la construction du savoir lié aux décimaux.

▷ Dans les deux cas, on propose en premier contact des écritures permettant de résoudre des, ou s'inspirant de, problèmes dits de la vie courante.

¤ On trouve ainsi des unités et des sous-unités à l'arrière-plan de la situation proposée, avec en corollaire une problématique de changement d'unités.

¤ Ce faisant, la virgule permet de raccorder en une seule écriture deux éléments distincts et en même temps de marquer l'unité du groupement de gauche.

¤ Les auteurs de Maths en Flèche essayent bien de corriger le tir, mais il est vraisemblable que la première image proposée imprègne durablement les élèves.

▷ Ceci permet de se préoccuper des images propagées.

¤ Maths en Flèche : On doit faire l'hypothèse que l'insuffisance des naturels a été introduite lors de la présentation des fractions. Si tel est le cas, on peut estimer que la *leçon* proposée permet de travailler la signification des chiffres après la virgule. Mais ce travail est tellement formel qu'on se demande comment les élèves vont vraiment produire du sens : finalement, les élèves ne sont appelés qu'à refaire ce qui a déjà montré sur un exemple. La méthode met en place des automatismes, au risque qu'ils soient aveugles.

¤ Apprentissages Mathématiques : L'aspect "nouveau nombre" des décimaux n'est certainement pas apparente ici. Elle aurait plutôt tendance à renforcer l'idée qu'un décimal est composé de deux entiers séparés par une virgule, propageant ainsi des conceptions erronées chez les élèves.

3 -Si vous deviez vous-même bâtir une séquence de découverte des décimaux, comment procéderiez-vous ?

▷ Question piège typique !

¤ Construire une séquence d'enseignement sur une notion est une tâche d'envergure. On doit en effet maitriser la notion pour elle-même, repérer dans la notion ce que l'on doit et ce que l'on peut installer à un niveau donné et mettre en place un chemin empruntable par les élèves (trame d'apprentissage).

¤ La séquence doit permettre aux élèves de se forger une représentation correcte de la notion qui ne bloque pas d'éventuels apports théoriques ultérieurs.

▷ Cette construction n'est pas possible sans une réflexion pédagogique aboutie, surtout à l'école primaire (pluridisciplinarité) et une analyse didactique conséquente (recherche universitaire, recherche-action).