Conquête de la multiplication à l'École Élémentaire.

Quelques Points de Repère

Bibliographie :

- le livre de Alain Descaves chez Hachette : Les mathématiques au CRPE à partir de la page 419.
- le livre de Charnay-Mante chez Hatier : Mathématiques 2009 Tome 2 partie III chapitre 5 à partir de la page 290.

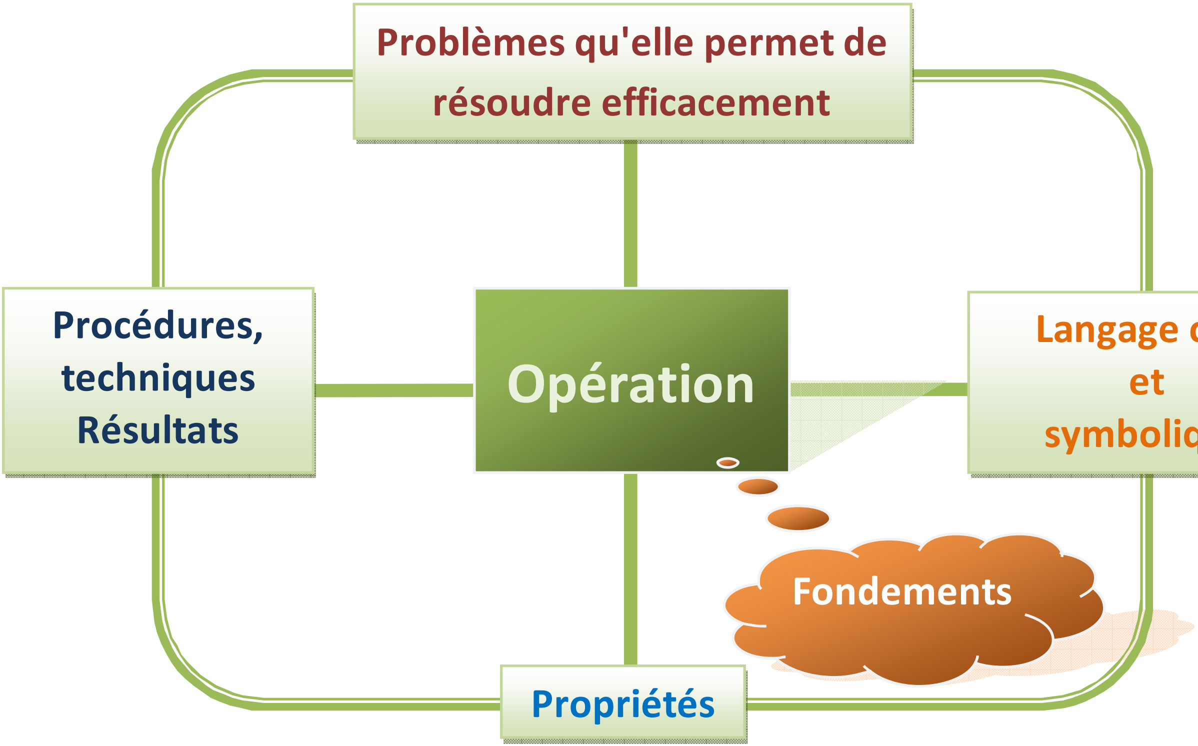
Classes particulièrement concernées : CE1 et CE2

Au CE 1 : Première rencontre avec la notion
Premiers calculs posés (2008)
Premières résolutions de problèmes multiplicatifs
Approche de la division de deux entiers à partir d'un problème de partage (équitable) ou de groupements.

Au CE 2 : Maitrise de ses tables de multiplication
Calcul mental de produits
Résolutions de problèmes multiplicatifs ou non
Maitrise de la multiplication posée à au moins deux chiffres et de la division posée avec un chiffre au diviseur.

Extensions au CM : multiplicité, décimaux

Rappel sur le sens d'une opération



3 types de fondements de la multiplication

1/ addition itérée
- partage équitable sans reste
- constitution de classes égales
- déplacement depuis 0 par sauts de n

2/ nombres rectangulaires
- produits cartésiens
- graphe de décisions
- configurations rectangulaires

3/ opérateurs fonctionnels
- proportionnalité simple et directe
- procédure "scalaire"
- procédure "fonctionnelle"

1/Fondement par l'addition itérée

$$\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ termes } a} \equiv n \otimes a$$

Ordinal

Puce a fait 7 bonds de 3 lieues. Combien a-t-il parcouru de lieues?

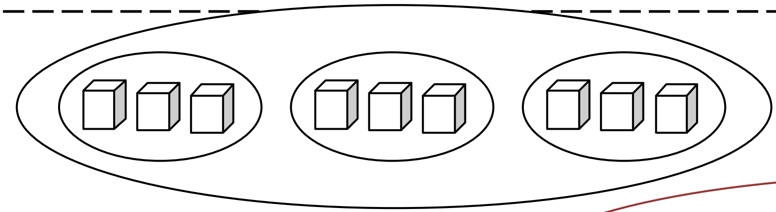
L'équipe bleue gagne 5 enveloppes contenant chacune 5 jetons

Cardinal

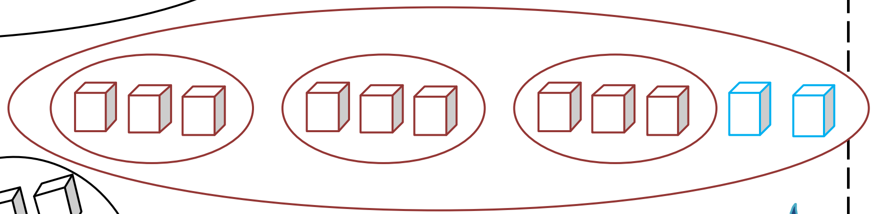
Distribue ces 18 cubes entre tes 3 amis pour qu'ils en aient chacun autant.

1/Fondement par l'addition itérée

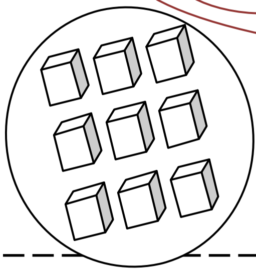
Schémas sous-jacents



Qui peut s'étendre en :

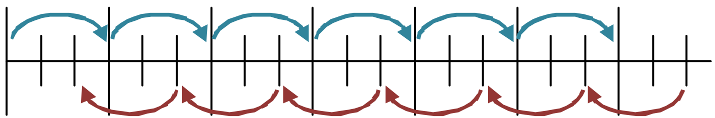


Ou se replier en :



Cardinal

Ordinal



2/Fondement par les nombres en rectangle

Il faut ici donner trois énoncés et trois schémas sous-jacents.

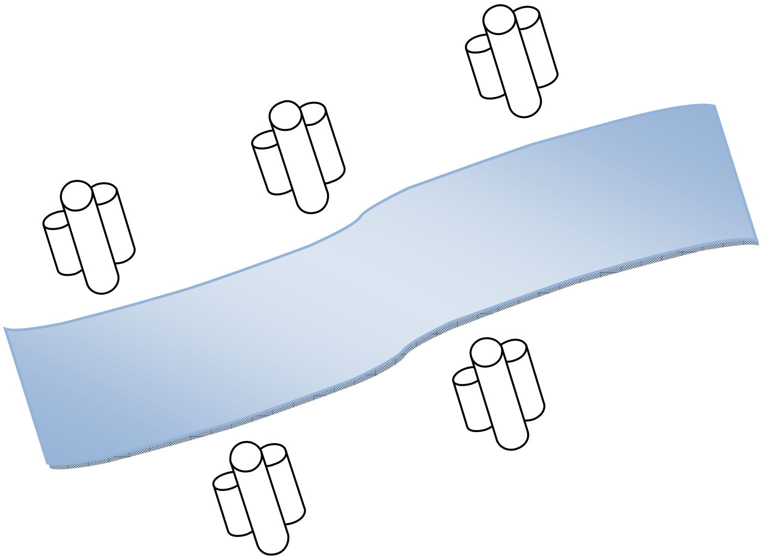
α/ situation de produit cartésien

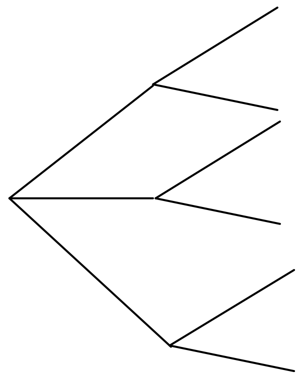
Pour habiller sa poupée, Julie peut choisir entre 3 sweet-shirt et 5 legging.
Combien de tenues différentes peut-elle assembler ?

	Leg 1	Leg 2	Leg 3	Leg 4	Leg 5
S-shirt 1	J 1	J 2	J 3	J 4	J 5
S-shirt 2	J 6	J 7	J 8	J 9	J A
S-shirt 3	J B	J C	J D	J E	J F

β/ situation usant du graphe de décision

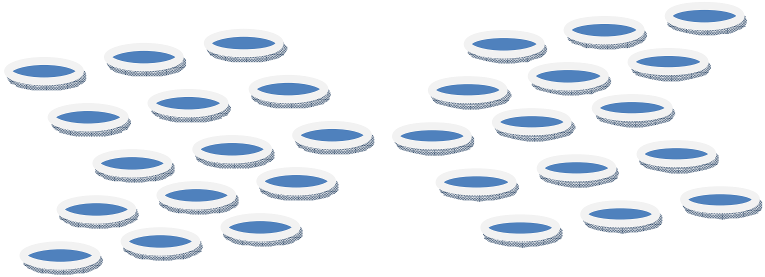
Il faut construire une route, d'une ville à une autre, de part et d'autre du fleuve. Combien de routes possibles ?



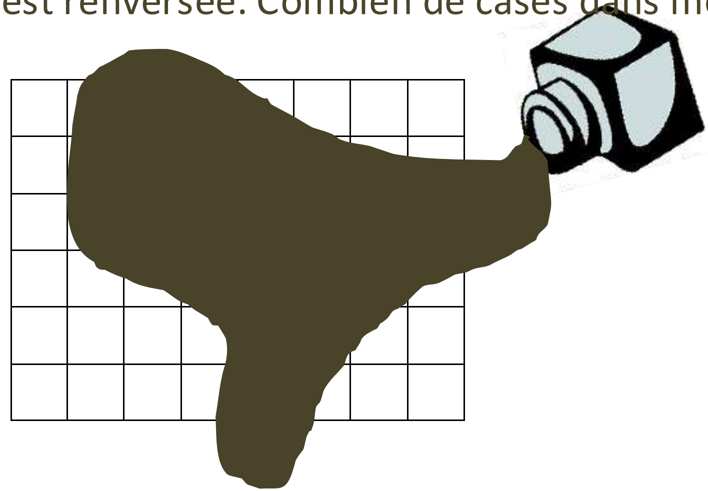


γ/ configuration rectangulaire

Combien de jetons ici :

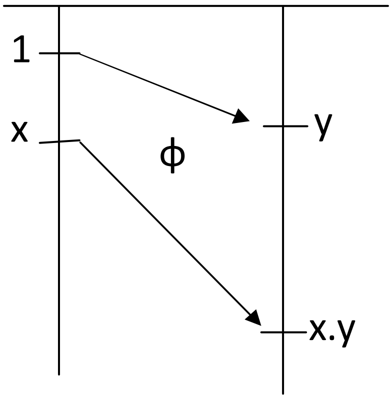


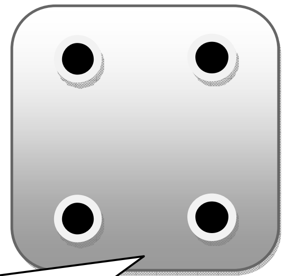
La bouteille d'encre s'est renversée. Combien de cases dans mon tableau ?

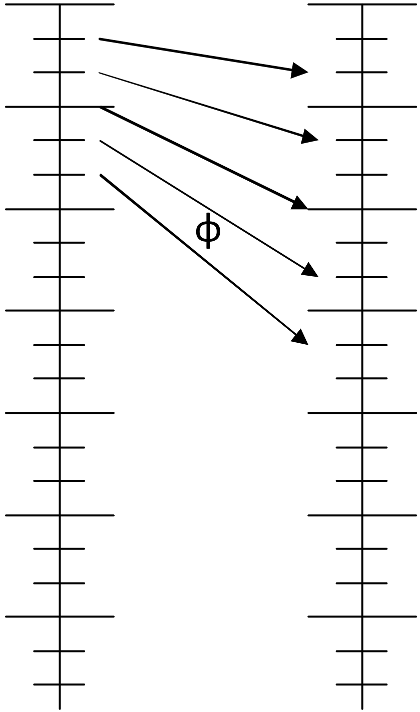


3/ Fondement par les opérateurs fonctionnels

- Un paquet de 4 yaourts coûte 2 €.
  Combien coûtent 20 yaourts ?
- Un lot de 24 yaourts est vendu 9 €.
  Combien coûterait un lot de 8 yaourts ?







Voir les structures multiplicatives selon Vergnaud.

Introduction au CE1 = additions itérées Exemple 1

…e cherche

Fais l'inventaire du matériel de peinture.

• Nombre de pinceaux :

.... + ... + ... = ...

ou

.... × .... = ...

• Nombre d'éponges :

.... + ... = ...

ou

.... × .... = ...

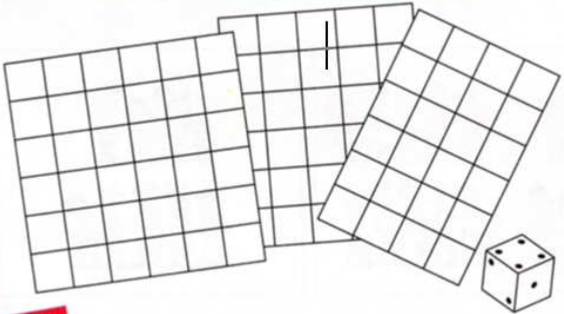
• Nombre de tubes de peinture :

• Nombre de seaux :

Introduction au CE1 = additions itérées Exemple 2

Activité préparatoire : Le jeu des carreaux colorés.

Application



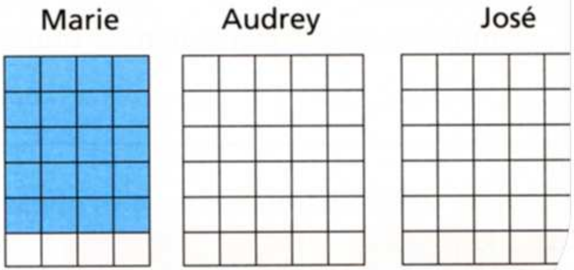
Règle du jeu des carreaux colorés (1 dé)

Trois joueurs. Un dé, des grilles de 6 bandes de 4 ou 5 ou 6 carreaux de large.
À chaque tour, chaque joueur tire au hasard une grille, lance le dé puis colorie le nombre de bandes indiqué par le dé.
Le joueur qui a colorié le plus de carreaux marque 1 point.
Une partie se joue en 5 tours.
Le gagnant est celui qui marque le plus de points.

1er tour

Marie a tiré une grille de 4, elle fait 5 avec le dé.
Audrey a tiré une grille de 5, elle fait 6 avec le dé.
José a tiré une grille de 6, il fait 3 avec le dé.
Colorie les grilles d'Audrey et de José.

Qui marque 1 point ? ....



2e tour

La multiplication est donc d'abord présentée comme une réduction d'écriture.

La présentation par additions itérées pose problème

P1 / Pas de commutativité évidente :

$$5+5+5 \stackrel{?}{=} 3+3+3+3+3$$

P2/ Extension aux autres ensembles de nombres délicate :

$$3 \times 1{,}5 = 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 \text{ mais } 1{,}5 \times 3 = \text{? Sens de } \frac{22}{7} \times 3 \text{ ?}$$

Pourtant cette introduction a été choisie

- **pour permettre aux enfants de construire le sens de la multiplication en s'appuyant sur leurs connaissances ;**
- **pour offrir le plus vite possible des problèmes dans le champ multiplicatif ;**
- **parce qu'il sera toujours possible d'aménager ultérieurement la rupture épistémologique issue du passage de N à D.**

Notion de champ conceptuel (1/4)

Gérard Vergnaud, psychologue, aborde la question de l'apprentissage en tenant compte à la fois du sujet (de ses connaissances) et des savoirs constitués.

Il ne dissocie pas le savoir de son utilisation :

« La connaissance rationnelle est opératoire ou n'est pas. »

Chez Vergnaud, les situations désignent l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve une notion mathématique.

Exemples de situations d'addition :

- Dans la classe, il y a des garçons et des filles.
- L'infirmière a toisé les élèves, elle a dit que j'ai grandi.
- Maud est plus âgée que moi et Elsa est plus jeune que moi.
- Antoine avait 17 billes ce matin, il en compté 25 ce soir.
- A midi on était encore à 100 bornes de Paris

Notion de champ conceptuel (2/4)

Deux aspects sont à prendre en compte dans l’examen des situations proposées pour l’enseignement d’une notion :

-d’une part leur extraordinaire diversité pour une même notion mathématique ;

-d’autre part le rôle de chacune d’elles dans la construction des connaissances des élèves à propos de cette notion.

Se pose la question de l’ordre dans lequel les situations sont proposées, de la fréquence avec laquelle on rencontre ces situations dans l’enseignement ou dans la vie courante.

Cela pose aussi la question de l’enseignement à proposer pour que les élèves sachent utiliser les notions qu’ils ont apprises, y compris pour résoudre des problèmes qu’ils n’ont pas rencontrés auparavant.

Notion de champ conceptuel (3/4)

L'analyse des situations conduit à négliger les informations peu ou pas pertinentes au profit de celles qui le sont (variables connues et inconnues) et des relations entre elles.

Gérard Vergnaud propose de classer les situations en fonction de leur traitement : deux situations seront dans la même classe si elles appellent le même traitement.

Exemples :

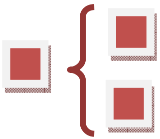
1/ la classe des situations où une petite collection d'objets est à dénombrer. Le traitement est le même, on « compte » les objets un par un.
2/ La classe des situations où l'on glisse d'une position sur la droite numérique à une autre.

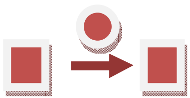
Notion de champ conceptuel (4/4)

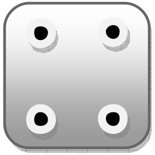
La notion de champ conceptuel permet d’aborder ensemble les situations et les concepts, elle est définie pour un ensemble de concepts par :

- l’ensemble des situations portant sur ces concepts ;
- ces concepts et les théorèmes permettant de résoudre les problèmes issus de ces situations ;
- les représentations langagières et symboliques susceptibles d'être utilisées pour les représenter.

Vergnaud repère que les situations d'un même champ conceptuel peuvent être résumées par un schéma à 3 pôles (**addition**) ou 4 pôles (**multiplication**).







CCX (1) : champ conceptuel de la multiplication

Ce champ conceptuel

- concerne les problèmes qui peuvent être résolus en utilisant une multiplication, une division ou une suite de multiplications et de divisions ;
- recouvre également les problèmes de proportionnalité.

Les trois notions (multiplication, division, proportionnalité) ne peuvent pas être étudiées de façon complètement indépendantes et, dès l'étude des premières situations mettant en jeu des multiplications, l'enseignant est conduit à poser des questions qui sont « de type division », même si les élèves ne les résolvent pas immédiatement à l'aide du calcul d'une division !

On peut structurer le CCX en 6 classes, certaines d'entre elles étant elles-même subdivisées.

CCX (2): les six classes

Classe 1 : proportion simple avec présence de l'unité (3 sous-classes)

Classe 2 : Classe 1 : proportion simple sans présence de l'unité (proportionnalité)

Classe 3 : Problèmes du type fois plus fois moins

Classe 4 : Produit de mesures (2 sous-classes)

Classe 5 : Proportion double

Classe 6 : Proportion simple composée

Voir mon document :

CCX Vergnaud from CharnayMante.pdf

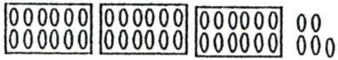
Voir aussi :

CCX Vergnaud Exos.pdf

Procédures personnelles (cas de la division)

procédures imagées

dessin figuratif



shéma explicatif

$\boxed{12}$ $\boxed{12}$ $\boxed{12}$ 5

procédures progressives fondées sur + et ×

additions itérées : 12 + 12 = 24 + 12 = 36 etc.

soustractions itérées : 273 - 12 = 261 - 12 = 249 etc.

additions ou soustractions de multiples du diviseur

4 fois 12 égale 48 Alors : 48 + 48 = 96 + 48 = 144 etc.

procédures multiplicatives

pose effective de la multiplication à trou → 12 x .. = 273

essais de multiples successifs du diviseur → 12 x 10 = 120 12 x 11 = 132 12 x 12 = 144 12 x 13 = 156

essais par approches successives → 12 x 30 = 360 12 x 25 = 300 12 x 15 = 180

procédures mixtes

quotients partiels au hasard → 12 x 15 = 180 273 - 180 = 93 12 x 7 = 84 93 - 84 = 7

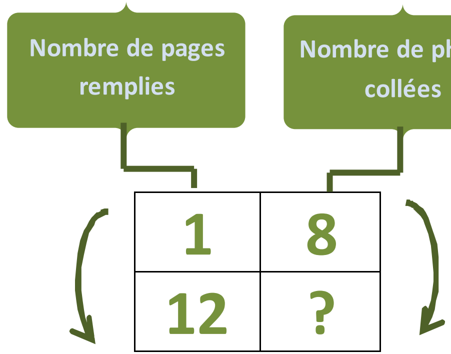
quotient : 15 + 7 = 22 reste : 9

utilisation de multiples de 10, 100 … pour les quotients partiels

Procédure scalaire vs procédure fonctionnelle (1/5)

Je range mes photos dans un album. J'en mets 8 par page. J'ai rempli 12 pages.

Si je range les photos page après page
La première page en entier, puis la seconde, et ainsi de suite …



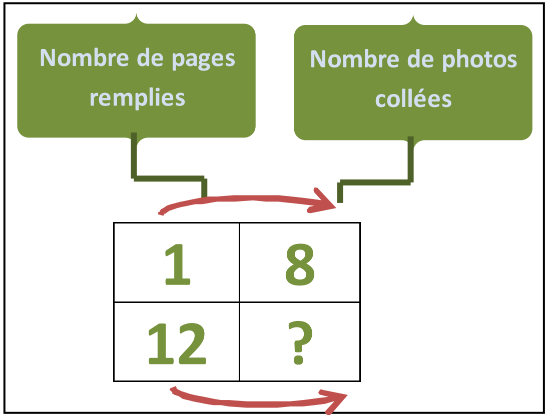
Je rapporte par colonne

La résolution est proche d'une démarche additive : "Le nombre de fois qu'il y a plus"

On est en présence d'une <u>procédure scalaire</u>.

Procédure scalaire vs procédure fonctionnelle (2/5)

Je range mes photos dans un album. J'en mets 8 par page. J'ai rempli 12 pages.



Si je range les photos, photo après photo, une photo sur la première page, puis une autre sur la seconde page, jusqu'à la douzième photo sur la douzième page. Et alors, la treizième sur la première page, la quatorzième sur la seconde page, et ainsi de suite jusqu'à 24… J'ai rangé 2 fois plus de photos que de pages! Et tout à la fin, 8 fois plus de photos que de pages ! Je rapporte par ligne. J'envisage d'emblée la possibilité de remplir un nombre -variable selon les circonstances- de pages et je lui associe le nombre de photos nécessaires.

On est en présence d'une <u>procédure fonctionnelle</u>.

Procédure scalaire vs procédure fonctionnelle (3/5)

- Distinguer :
  - Notion d'**état** (ce qui est, ce qui sera)
  - Notion d'**opérateur** (comment ça va se transformer)
- En suivant Vergnaud :
  - **Procédure scalaire** = **chirurgie sur l'opérateur**
    Remplir 12 pages de l'album, c'est remplir 10 pages puis 4 pages, ou successivement 3 fois 3 pages, puis encore une page …
  - **Procédure fonctionnelle** = **chirurgie sur l'état**
    Remplir 8 photos par page, c'est en remplir 2 fois plus que s'il n'y avait que 4 photos par page.

Procédure scalaire vs procédure fonctionnelle (4/5)

On retrouve cette distinction dans le cadre de la proportionnalité.

Il s'agit de remplir le tableau ci-dessous sachant que c'est un tableau de proportionnalité :

?

× ?

150	200	250	300			450
		300	360	420	480	

?

Procédure scalaire vs procédure fonctionnelle (4/5)

Voici la solution :

150	200	250	300	350	400	450
180	240	300	360	420	480	540

Par procédure scalaire, on obtient l'anté-image de 480, soit 400, et donc l'image de 150, soit 180.

Comme 200 est la demi-somme de 150 et 250 (encore une procédure scalaire) on trouve son image, soit 240 [=(180 + 300)/2].

Même démarche pour 420 et sa valeur source 350.

Ces procédures sont locales, mais plus efficaces que la démarche consistant à chercher le coefficient de proportionnalité.