La symétrie axiale. Notes rapides d'après C. M.

La symétrie axiale est très présente dans notre société :

Logos, constructions, objets de toutes sortes ; notre corps dans la glace, reflets …
dès l'école maternelle, les enfants sont amenés à construire des figures symétriques :
certains découpages, certains matériels pédagogiques.

Comme fait d'enseignement, la symétrie axiale engage deux types de problèmes :

Repérage (en vue de les tracer) des axes de symétrie d'une figure ;
Tracé du symétrique d'une figure par rapport à un axe

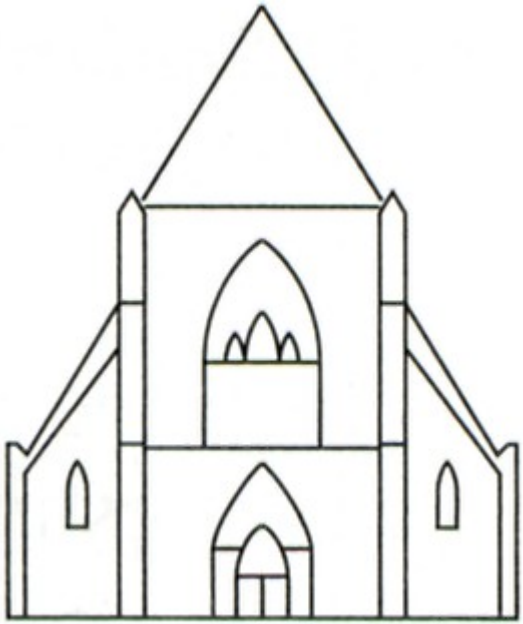
- ¤ à main levée ou non
- ¤ avec un papier calque, sur du papier quadrillé, sur du papier blanc.

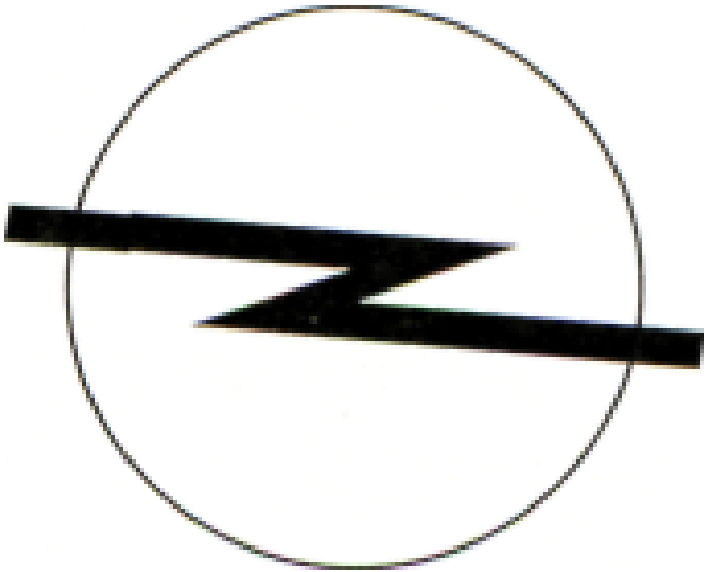
Ces tâches nécessitent diverses compétences chez les élèves ;
Les difficultés qu'ils rencontrent sont maintenant bien repérées ;
Les tâches proposés peuvent être calibrées grâce à des variables didactiques spécifiques.

1 Recherche d'un axe de symétrie

Les procédures possibles

Exemple : ces figures admettent-elles un axe de symétrie ?





Stratégies possibles pour répondre à la question

- Il faut d'abord repérer que la figure est "symétrique"
  donc se convaincre -perceptivement-, de l'existence d'un axe.
- Dans un second temps, on vérifie que cette conjecture est valide.

Pour conjecturer l'existence d'un axe, on repère :

- soit une sous-figure qui admet un axe de symétrie ; ce dernier est alors naturellement candidat à être un axe de symétrie de la figure complète ;
- soit des éléments de la figure qui semblent symétriques (segments de même longueur, angles de même mesure,...) et on cherche alors à préciser leur axe de symétrie.

Pour vérifier que l'axe conjecturé est bien un axe de symétrie on peut :

- soit tracer mentalement, voire réellement dans certains cas, le symétrique de la figure (éventuellement on peut se contenter de points clés) et repérer si le symétrique obtenu fait partie de la figure ;
- soit effectuer mentalement le pliage et vérifier que les deux parties de la figure situées dans les demi-plans définis par la droite se superposent.

Les principales difficultés rencontrées par les élèves

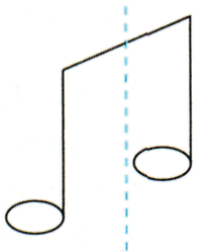
Dans le cas du pliage mental, il y a une difficulté supplémentaire, dans la mesure où les élèves doivent déplacer une image mentale ne se situant pas dans le plan.

- Certains élèves n'arrivent pas à mobiliser des images mentales de pliage ou de construction de symétrique.

- Beaucoup d'élèves s'appuient sur le théorème-élève suivant :
  Un axe de symétrie d'une figure passe par le "milieu" de cette figure.
  Attention, le mot « milieu » utilisé par les élèves a plusieurs sens, il peut s'agir :
  - du milieu d'un segment ;
  - du centre d'un cercle, d'un parallélogramme ;
  - d'une droite qui partage la figure en deux figures superposables.

  En somme, pour les élèves, le « milieu » est le point d'équilibre ou une ligne d'équilibre.

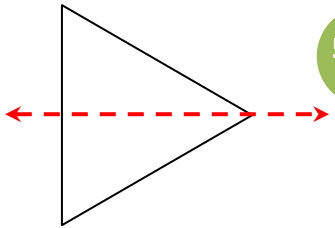
- Autre théorème-élève classique :
  L'axe de symétrie doit partager la figure en deux parties superposables
  Exemple avec la figure ci-contre :



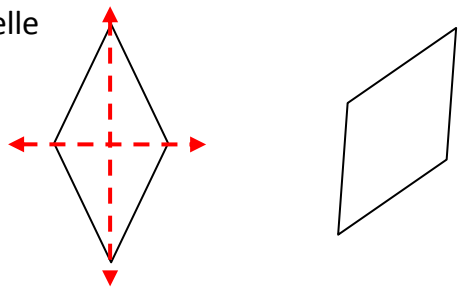
Les élèves privilégient certaines directions

- En particulier les axes verticaux ou horizontaux sont plus facilement repérés comme des axes de symétrie. La faute au contexte social et scolaire qui privilégie ces directions.

Conséquences :



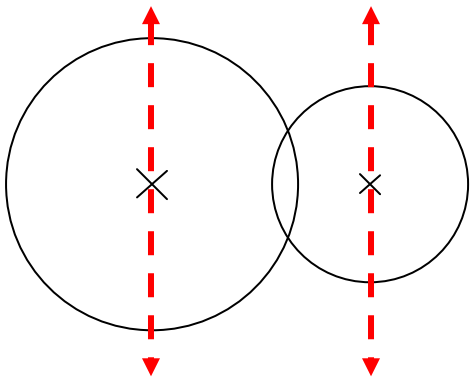
- dans le cas d'une figure présentant plusieurs axes de symétrie, les élèves ne repèrent que l'axe horizontal ou vertical s'il existe. Exemple ci-contre (2 axes ne sont pas perçus).
- Si une figure ayant un axe de symétrie est représentée de telle sorte que cet axe ne soit ni horizontal, ni vertical, beaucoup d'élèves estimeront que la figure n'admet pas d'axe de symétrie. Ce phénomène est amplifié s'il y a plusieurs axes de symétrie. Exemples avec les figures ci-contre.



- Dans certains cas, il peut aussi y avoir un phénomène de contrat qui amène l'élève à penser qu'il y a au maximum un axe de symétrie par figure (règle induite par les exercices proposés).

Les élèves ne hiérarchisent pas bien les informations fournies par la figure.

Exemple avec cette figure : les élèves citent comme axe de symétrie (à tort) les flèches rouges.



- Dans le cas où la figure est composée de figures élémentaires facilement repérables et possédant chacune un axe de symétrie, les élèves ont tendance à assimiler ces axes avec ceux de la figure complète.

Cette analyse des difficultés permet de mettre en évidence les variables didactiques associées à la tâche de reconnaissance d'un axe de symétrie.

Principales variables didactiques pour les situations de recherche d'un axe.

Classement selon trois critères : outils, supports, caractéristiques de la figure analysée.

Les outils fournis à l'élève

- Papier calque : permet de décalquer la figure et de faire divers essais de pliage pour trouver un éventuel axe de symétrie.

  ⇒ Pas besoin d'anticiper sur une position éventuelle de l'axe cherché.

  Note : situation analogue lorsque l'élève peut plier la feuille sur laquelle est représentée la figure.
- Mise à disposition d'un **géomiroir** : l'élève peut contrôler si une droite est un axe de symétrie.
- L'élève ne dispose pas des outils ci-dessus et ne peut plier la feuille : il est obligé de faire appel à des images mentales

Plaque en plastique qui permet à la fois de réfléchir l'image du dessin et de voir par transparence la figure placée derrière elle.

Le support sur lequel est représentée la figure

- Papier quadrillé. Deux cas bien différents :

  1/ l'axe de symétrie correspond à une ligne du quadrillage.

  L'axe étant tracé, d'une certaine façon, son repérage en est facilité,
  (et le décompte des carreaux peux faciliter la vérification) ;

  2/ l'axe ne correspond pas à une ligne du quadrillage.

  Alors la présence des lignes du quadrillage peut induire l'élève en erreur dans la mesure où il recherchera l'axe uniquement parmi les lignes du papier quadrillé.

- Papier non quadrillé : l'élève est obligé de faire appel à des images mentales.

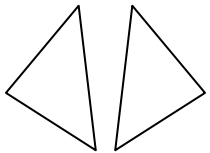
Les caractéristiques de la figure

(on se place dans le cas où la figure est représentée sur papier blanc)

- L'orientation de l'axe (quand il existe) : l'élève reconnaîtra plus facilement un axe "horizontal" ou "vertical" qu'un axe oblique.
- Le nombre d'axes de symétrie : si la figure possède plusieurs axes de symétrie, l'élève, après en avoir trouvé un, peut considérer que sa tâche est terminée, et donc ne pas trouver les autres (phénomène de contrat mal perçu déjà signalé). Suite ->
- La familiarité de l'élève avec la figure : si c'est une silhouette de personne ou un triangle isocèle, l'élève reconnaîtra facilement l'axe de symétrie.

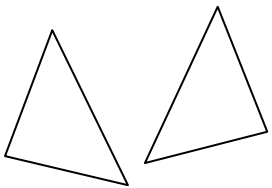
- Les figures de base qui constituent la figure :

  ¤ Si la figure est composée de deux éléments isolés qui sont symétriques, l'élève reconnaîtra facilement l'existence de l'axe, comme dans l'exemple ci-dessous ;



  ¤ En revanche, si la figure est composée de deux éléments superposables non symétriques, il risque de considérer que la figure a un axe de symétrie ;

  ¤ Enfin, si la figure peut être partagée par une droite en deux parties superposables,



  l'élève risque fort de reconnaître un axe de symétrie alors qu'il n'y en a sans doute pas ; Exemple typique de la diagonale d'un parallélogramme.

2 Tracer le symétrique d'une figure par rapport à un axe

Procédures possibles

À l'école, trois cas, suivant le matériel et les consignes donnés aux élèves. On garde -faute d'information explicite dans les programmes 2008- l'idée que le cas « papier blanc avec équerre et règle graduée » n'est pas au programme de l'école.

Pliage

L'élève doit effectuer convenablement le pliage suivant l'axe de symétrie
Par transparence il décalque la figure.
Cette procédure ne demande que des compétences psychomotrices.

Papier calque

L'élève doit appliquer une technique qui n'est pas forcément élémentaire :

- ¤ décalquer la figure de départ avec l'axe (compétences psychomotrices) ;
- ¤ retourner la feuille de papier calque et la placer la feuille correctement sur l'axe et à *bonne hauteur*. (Il faut prendre un point de repère sur l'axe) ;
- ¤ repasser le crayon sur la figure afin qu'elle laisse une empreinte sur la feuille.

Papier quadrillé

Deux procédures :

¤ P1 = placer le symétrique de tous les points remarquables de la figure, joindre ces points. À l'école, on demande principalement de construire des symétriques de polygones, les points remarquables étant alors les sommets ;

¤ P2 = placer le symétrique d'un point puis à construire la figure à partir de ce point, en *inversant la figure de départ* et en respectant des propriétés de conservation des longueurs.

La quadrillage facilite le placement des points symétriques dans le cas où l'axe coïncide avec une ligne du quadrillage (et à condition que les sommets du quadrilatère soient sur les nœuds du quadrillage.;

En effet, dans ce cas, les perpendiculaires sont déjà tracées et le report de mesure se fait par décompte des carreaux.

Dans le cas où l'axe ne coïncide pas avec une ligne du quadrillage, divers obstacles peuvent apparaître, Cf. infra.

Difficultés des élèves

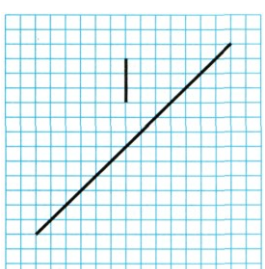
4 types d'erreurs quand on demande le tracé du symétrique à l'aide d'un quadrillage.

- Erreur n° 1 : se tromper dans le dénombrement des carreaux lors de la construction du symétrique d'un point.
- Erreur n°2 : consiste à construire le symétrique d'un point correctement puis à placer l'image de la figure en la translatant.
  Cette erreur a pour origine le fait que l'élève a retenu que le symétrique d'une figure est superposable à la figure de départ et est placé de « l'autre côté » de la droite.
- Erreur n°3 : Dans le cas d'un axe porté par les diagonales des carreaux du quadrillage, l'élève suit les lignes du quadrillage (horizontales ou verticales) pour tracer le symétrique d'un point.
  Cette procédure a pour origine les premiers exercices que l'élève rencontre, dans lesquels l'axe est soit horizontal, soit vertical et donc pour lesquels la procédure qui consiste à suivre les lignes du quadrillage donne un résultat juste.
- Erreur n°4 : Peut se produire lorsque le nombre de sommets du polygone dont il faut tracer le symétrique est important. L'élève trace le symétrique de tous les points puis il se trompe en joignant ces points. Cette erreur est liée au fait que l'élève n'arrive pas à se construire une image mentale du résultat final.

Variables didactiques

5 variables didactiques relatives à la tâche de construction du symétrique d'une figure.

- Consignes données aux élèves : peuvent-ils plier la feuille ou non ?
- Matériel mis à la disposition des élèves : papier calque, géomiroir, etc.
- L'axe est-il horizontal ? vertical ? oblique ?
- La figure est-elle une figure de base ou est-elle composée?
  Si c'est un polygone, quel est son nombre de sommets ?
  La figure coupe-t-elle l'axe ?
  Contient-elle des côtés horizontaux ou verticaux ? Dans ce dernier cas, cela peut renforcer le fait que l'élève suivent les lignes du quadrillage.
- L'espace réservé aux élèves pour répondre : cet espace leur permet-il de mettre en œuvre toutes les procédures auxquelles ils peuvent penser ?



Le choix de chacune de ces variables va plus ou moins faciliter la mobilisation de certaines procédures par les élèves. Certains choix peuvent renforcer des procédures erronées, avec un pourcentage d'erreurs très important, comme dans l'exemple de la figure ci-contre.

3 Conclusion

Il existe une conception erronée de la symétrie, très largement répandue chez les élèves, et pouvant être ainsi caractérisée : **« le symétrique d'une figure est une figure identique située de l'autre côté de l'axe, à une même "distance" de l'axe que la figure objet. Il y a conservation de la nature de la figure, des dimensions et de la forme »**

La symétrie axiale est ainsi perçue comme une application d'un demi-plan défini par l'axe dans l'autre demi-plan. Cette conception amène aussi les élèves à penser que **l'axe de symétrie d'une figure est une droite d'équilibre entre les deux parties**, qui passe par le « milieu » de la figure.
Les élèves prennent d'ailleurs toujours en compte la conservation de la distance de l'objet à l'axe. Mais cette notion de distance prend pour les élèves des sens différents en fonction des variables didactiques des tâches proposées.
Ainsi, la distance peut concerner l'objet tout entier ou des points de cet objet, ou bien elle peut être déterminée suivant une direction qui n'est pas forcément orthogonale.

Toutes **les conceptions présentées ici sont durables** (bien au-delà de l'école primaire), en grande partie parce qu'elles ont dans l'enseignement « traditionnel » un domaine de validité important.

Associées à cette notion, on retrouve les difficultés liées à la mobilisation d'images mentales qui doivent être *déplacées* en sortant du plan.