Numération de position & Problèmes de bases.

Exos repris du Fénichel-Pauvert

1) Numération de position et exercices d'arithmétique

F4p134 Avec les chiffres 1, 2, 3, 4 on peut former deux nombres de deux chiffres, par exemple 13 et 42 ou 32 et 14 … Choisir les deux nombres pour que la différence entre les deux soit : a) la plus petite possible b) la plus grande possible.

F5p134 (D'après Rouen 93) Des cinq chiffres composant le prix de 36 bidules, on ne peut lire que le chiffre des centaines (un 4) et celui des dizaines (un 3). On sait de plus qu'un bidule coûte entre 1 100 F et 1 450 F.

1) Donner les prix possibles de 36 bidules (il y a trois solutions possibles).

2) Mais en fait, le prix d'un bidule est un nombre premier. Quel est alors le prix des 36 bidules et partant d'un d'entre eux ?

2) Rôle des puissances de la base dans l'écriture d'un nombre

F6p135 a) Une collection d'objets est organisée en paquets de cinq. Il y a 26 paquets de cinq et 3 objets restants. Écrire le nombre d'objets de cette collection en base 5. Quelle aurait été l'organisation de cette collection si on avait regroupé les objets par paquets de 10 ?

b) Une quantité d'objets s'écrit 3021 en base cinq. Comment s'écrirait ce nombre en base dix ?

c) Une quantité X d'objets s'écrit a0c en base cinq (a > 0). Quelles sont en base dix les valeurs possibles de X ?

F7p135 (from Orléans-Tours 93)

1) Écrire en base douze le nombre $\underline{144}_{10}$.

2) Écrire en base dix le nombre qui s'écrit 1000 en base douze.

3) On désigne par 0, 1, 2, 3, …, 9, a, b les douze chiffres utilisés en base douze. Écrire en base dix d'une part les nombres a, b , ab, ba, d'autre part le produit de a par b.

F8p135 (Montpellier 93) Tous les raisonnements et calculs devront être clairement explicités.

1) Trouver l'écriture chiffrée en base trois du nombre $1+3+3^2+3^3+3^4+3^6$.

2) Trouver l'écriture de ce même nombre en base 9.

3) Trouver l'écriture chiffrée du nombre 5x(5x(5x(5+4)+3)+2)+1 en base 5.

4) Pour écrire un nombre dans la base seize, on utilise l'alphabet 0, 1, 2, …, 9,a, b, …, e, f. Trouver l'écriture chiffrée du nombre (4^3+1)x(4^3+1) dans la base seize.

F9p135 (Montpellier 94)

a) Déterminer la base a (si elle existe) dans laquelle $\underline{113}_a = \underline{21}_a + \underline{32}_a$.

b) Déterminer la base b (si elle existe) dans laquelle $\underline{26}_b + \underline{12}_b = \underline{43}_b$.

Exercices en vrac

V 1 Des enfants utilisent le système d'échange suivant :

Pour 9 pogs, on obtient 20 billes
pour 15 pogs, on obtient 16 agates

Combien obtient-on d'agates en échange de 25 billes ?

V 2 [Montpellier 97 légèrement modifié]

Le plus grand des nombres qui s'écrivent en base 10 avec deux chiffres est 99.

1/ Quelle est l'écriture en base 10 du plus grand des nombres qui s'écrivent en base 8 avec deux chiffres ?

2/ Quelle est l'écriture en base 10 du plus grand des nombres qui s'écrivent en base 12 avec deux chiffres ? Rappel de l'alphabet en base 12 : 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 α β.

3/ Si n est un entier supérieur à 1, le plus grand des nombres qui s'écrivent en base n avec 1 chiffre est (n - 1). Déterminer le plus grand des nombres que l'on peut écrire en base n avc deux chiffres. Retrouver les résultats des questions précédentes.

4/ Quel est le plus entier n pour lequel lenombre 224 (écrit en base 10) s'écrira en base n avec deux chiffres ?

V 3 [Nancy-Metz 97]

Obélix refusait d'utiliser la numération imposée par l'envahisseur romain et employait la numération positionnelle décimale. Un jour qu'il avait livré 18 somptueux menhirs, il inscrivit sur une tablette d'argile le montant de la somme recueillie. Mais Idéfix, qui passait par là, gratta la tablette avant qu'elle ne soit sèche et seul le chiffre des centaines resta lisible : un superbe 5. Obélix tenta de lire les autres chiffres, mais en vain. Il essaya ensuite de les retrouver, toujours sans succès. Il se souvint alors que :

(1) Tous les menhirs étaient au même prix.
(2) Le prix , en sesterces, d'un menhir était un nombre entier compris entre 70 et 90.
(3) Le chiffre des unités du prix total des 18 menhirs était inférieur à 5.
(4) Le chiffre des dizaines du prix total des 18 menhirs était supérieur à 5.

Ces informations permirent à Astérix d'effectuer de savants calculs et de retrouver (enfin !.....) le nombre partiellement effacé.

Retrouvez les calculs effectués par Astérix, ainsi que le prix des 18 menhirs.

V 4 [Bordeaux 2001]

Un nombre de trois chiffres est tel que :

- la différence entre ce nombre et le nombre retourné est 297,
- la somme des trois chiffres est 11,
- la somme du triple du chiffre des centaines et du double du chiffre des dizaines est 22.

Trouver ce nombre.

(Indication : si, par exemple, le nombre était 231 le nombre retourné serait 132.)

V 5 [Aix 1999]

Un nombre à 3 chiffres à 4 pour chiffres des centaines. Ce nombre est 26 fois plus grand que le nombre à 2 chiffres obtenu en enlevant le chiffre ces centaines. Quel est ce nombre ?

V 6 [D'après Montpellier 1995]

1/ Compléter le tableau ci-contre en donnant l'écriture décimale des nombres $\underline{ll}_n$ et $\underline{111}_n$ pour les différentes valeurs de la base *n* envisagées.

	$\underline{11}_n$	$\underline{111}_n$
n=2		
n=3		
n=4		21
n=5		
n=6		

2/ Calculer *n* sachant que $\underline{111}_n = 73$.

3/ Calculer *n* sachant que $(\underline{11}_n)^2 - \underline{111}_n = 5$

4/ L'équation $(\underline{11}_n)^2 - \underline{111}_n = \underline{10}_n$ permet-elle de calculer la base n ? La réponse sera justifiée.

V 7 [Nice 1995]

Le code d'accès à une photocopieuse comporte 4 chiffres. Chacun des chiffres peut être 0 ou 1 ou 2 ou... 9. Je veux essayer tous les codes possibles.

a) Combien me faut-il de temps sachant que je mets 10 secondes pour composer un code ?

b) Y arriverai-je en une journée ?

V 8 [Lille 1996]

1) Trouver tous les nombres entiers compris entre 100 et 1000 qui s'écrivent avec les chiffres 2, 5, 8, et dont les 3 chiffres sont différents. On s'attachera à présenter cette recherche de façon simple, claire et systématique.

2) On note S la somme de tous les nombres ainsi obtenus et £ = 2 + 5 + 8; Montrer, sans calculer la somme S, que S = tx 222.

3) Sans rechercher tous les nombres entiers compris entre 100 et 1000 qui s'écrivent avec les chiffres, 4, 7, 9, et dont les 3 chiffres sont différents, trouver leur somme.

V 9 [Toulouse 1996]

Un nombre de 3 chiffres augmente de 540 lorsqu'on permute les deux chiffres de gauche ; il diminue de 27 lorsqu'on permute les deux chiffres de droite. La somme des chiffres de ce nombre est 15.

Quel est ce nombre ?

V 10 [Montpellier 1998]

La numération sexagésimale (base soixante) exigerait l'utilisation de soixante chiffres distincts ! En pratique, on décide d'écrire chacun de ces chiffres en utilisant le codage en base dix du nombre qu'il représente, et en l'écrivant entre parenthèses.

Par exemple, (2) (19) (51) est l'écriture sexagésimale du nombre qui s'écrit 8391 en base dix ; en effet : 8391 = 2 x 3600 + 19 x 60 + 51 ,

1°) Écrire en base dix le nombre dont l'écriture sexagésimale est (3) (0) (17) (48) .

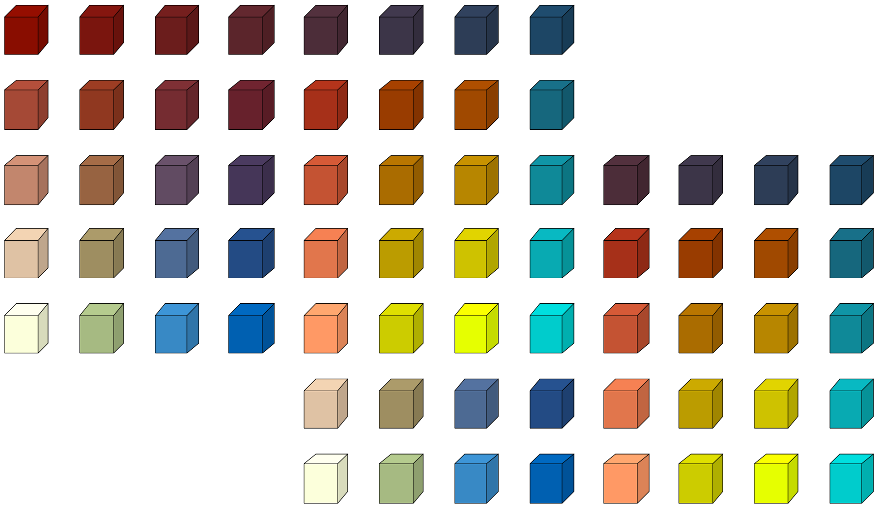
2°) Trouver l'écriture sexagésimale du nombre qui s'écrit 54 325 432 en base dix.

3°) Soit N un nombre entier naturel dont l'écriture sexagésimale est (ab) (ba), a et b étant deux chiffres de notre système de numération de base dix.

a) Quelles conditions doivent vérifier a et b pour que l'écriture (ab) (ba), soit correcte ?

b) On suppose désormais que N est un multiple de 5. Que peut-on en déduire à propos de l'écriture sexagésimale de N ?
c) Si de plus on sait que N s'écrit b21a en base dix, déterminer les valeurs de a et b et, par suite, de N (que l'on écrira en base dix).

Extra



1/ Compter directement en base 8 le nombre de petits cubes sur l'image ci-dessus.

2/ Compter directement en base 5 le nombre de petits cubes sur l'image ci-dessus.

3/ Vérifier l'égalité algébrique des deux numérotations obtenues précédemment, sans jamais calculer ou exploiter le répertoire calculatoire de la base 10.

4/ Voici une histoire.

Les habitants de Vega comptent normalement sur leurs 8 doigts. Ceux de Proxima se contentent de leurs cinq antennes.

A l'occasion d'un Davos Inter Galactique, un plénipotentiaire du système solaire s'embarque avec deux plateaux de bijoux à offrir respectivement au représentant de Vega et à son homologue de Proxima.

Quel rangement le plénipotentiaire peut-il adopter a priori pour qu'au premier coup d'œil, les deux représentants constatent qu'ils reçoivent pareillement - ce qui évitera une nouvelle guerre des mondes. Appliquer ce principe quand le plateau contient 86 pierres précieuses.

Corrigés rapides

F4 Recherche facile Diff. la plus grande: 43 – 12 = 31 Diff. la plus petite: 31 – 24 = 7
{ Considérer que l'on dispose de 4 cartes marquées 1 ou 2 ou 3 ou 4, et qu'on les assemble deux à deux pour fabriquer des écritures à deux chiffres. La plus grande écriture est donc [4][3] qui amène à la plus petite [1][2] et du coup à l'écart maximum 43-12=31. Le plus petit écart est obtenu avec [3][1] et [2][4] qui offre une différence de 7 = 31-24.}

F5 Exo difficile **¿ =** dm43u = 36*k 1100 <k<1450 => 39600 < dm43u < 52200

◊ Pour que ¿ soit divisible par 36, il faut déjà qu'il soit divisible par 4, donc que 3u le soit ; d'où **u** à choisir parmi **2** (4*8=32) **6** (4*9=36)

◊ Il faut aussi que ¿ soit divisible par 9 donc que ß = d+ m + 7 + u le soit.

◊ On joue sur la contrainte d'encadrement.

1er cas : d =3 donc m=9 d'où ß = 19 + u = 21 ou 25 (non divisible par 9)
Pas de solution …
2^{ième} cas : d =4 d'où **¿ =** 4m43u => ß = 11 + m + u = 13 + m (u=2) ou 17 + m (u=6)
13 + m divisible par 9 _ m = 5 : **solution ¿ = 45432 _ k = 1262**
17 + m divisible par 9 _ m = 1 : solution **¿ = 41436 _ k = 1151**
3^{ième} cas : d = 5 => m < 2 d'où **¿ =** 5043u soit 50432 ou 50436
¿ = 5143u soit 51432 ou 51436
Seule solution possible : **¿ = 50436 _ k = 1401**
Des trois solutions 1151, 1262, 1401, seul **1151** est susceptible d'être un **nombre premier**.

F6 a) 26 paquets de 5 et 3 restants
26 = 5*5 + 1 restant ⇔ 1 paquet de paquets et 1 restant Sol = $\underline{1013}_5$
En base 10 26 paquets de 5 font 13 paquets de 10 donc Sol = 133
b) $\underline{3021}_5$ → 3 paquets de paquets de 5 et 2 paquets de 5 et 1 unité
soit 3x5 x 5 x 5 +2 x 5 +1 = 3 x 5 x 25+10+1 = 3 x 75+10+1=386
c) X = $\underline{a0c}_5$ Donc a = 1 ou 2 ou 3 ou 4 ⇔ $\underline{a00}_5$ = 25 ou 50 ou 75 ou 100.
Et comme c = 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4 les solutions sont donc :
25 26 27 28 29 50 51 52 53 54 75 76 77 78 79
100 101 102 103 104
Exo facile en appareillant avec boulier ou abaque ou même jeton.

Le tableur Excel offre en deux tirettes les solutions, Cf. ci-contre.

25a+c	0	1	2	3	4
1	25	26	27	28	29
2	50	51	52	53	54
3	75	76	77	78	79
4	100	101	102	103	104

V 1 Ce n'est pas un exercice de numération à proprement parler mais d'un exercice dans le champ de la proportionnalité.

9 p = 20 b et 15 p = 16 a On cherche un multiple commun à 9 p et 15 p pour unifier les b et les a.
45 convient : 45 p = 100 b et 45 p = 48 a ⇒ 100 b = 48 a ⇒ 25 b = $\boxed{12\ a}$

V 2 [Montpellier 97 légèrement modifié]

$\underline{77}_8 = 63$; $\underline{\beta\beta}_{12} = 143$ $\underline{(n-1)(n-1)}_n = (n-1)^2$ $15^2 = 225 = 224 + 1 \Rightarrow n = 15$.

V 3 Une démarche possible : on cherche a priori l'ensemble des prix possibles des 18 menhirs en calculant tous les produits pu x 18 avec pu compris entre 70 et 90. On ne garde que les résultats ayant un chiffre des centaines égal à 5 et parmi ceux-ci ceux dont le chiffre des unités est inférieur à 5, et parmi le fruit de ce second filtrage ceux dont le chiffre des dizaines est supérieur à 5. Ne reste plus que 1584 = 18 x 84.

V 4 [Bordeaux 2001]

En traitant les données, on produit un système de 3 équations à solutions dans ℵ :
a = 3 + c ; a + b = 11 - c ; 3a + 2b = 22 où abc désigne le nombre cherché. On en déduit c = 3 puis a = 6 et b = 2. Le nombre cherché est 623.

V 5 [Aix 1999]

Réponse : 416.

V 6 [D’après Montpellier 1995]

1/ Pas de difficulté particulière.
2/ En traduisant la question on obtient l’équation $n^2 + n + 1 = 73$. Les techniques standards de résolution ne sont pas attendues. Mais l’on peut dériver l’équation en n(n+1) = 72. Le problème consiste alors à chercher dans la table de multiplication un produit de deux entiers consécutifs égal à 72. Comme 72 est dans la table de 8 …
3/ Nouvelle équation, qui se simplifie d’elle même et offre la solution n = 5.
4/ Non, car on tombe sur la tautologie n = n. Au passage, on retrouve le résultat classique, mais généralisé à n’importe quelle base (supérieure à 2) : 11 x 11 = 121

V 7 [Nice 1995]

10^4 codes différents d’où 10^5 secondes pour les essayer tous, en plus d’une journée (86400 s) mais en moins de 2.

V 8 [Lille 1996]

1/ En dressant un arbre, on obtient les six solutions attendues : 258 285 528 582 825 852.
2/ S = 2t x 100 + 2t x 10 + 2t = 222t 3/ Par similarité : S = 20 x 222 = 4440.

V 9 [Toulouse 1996]

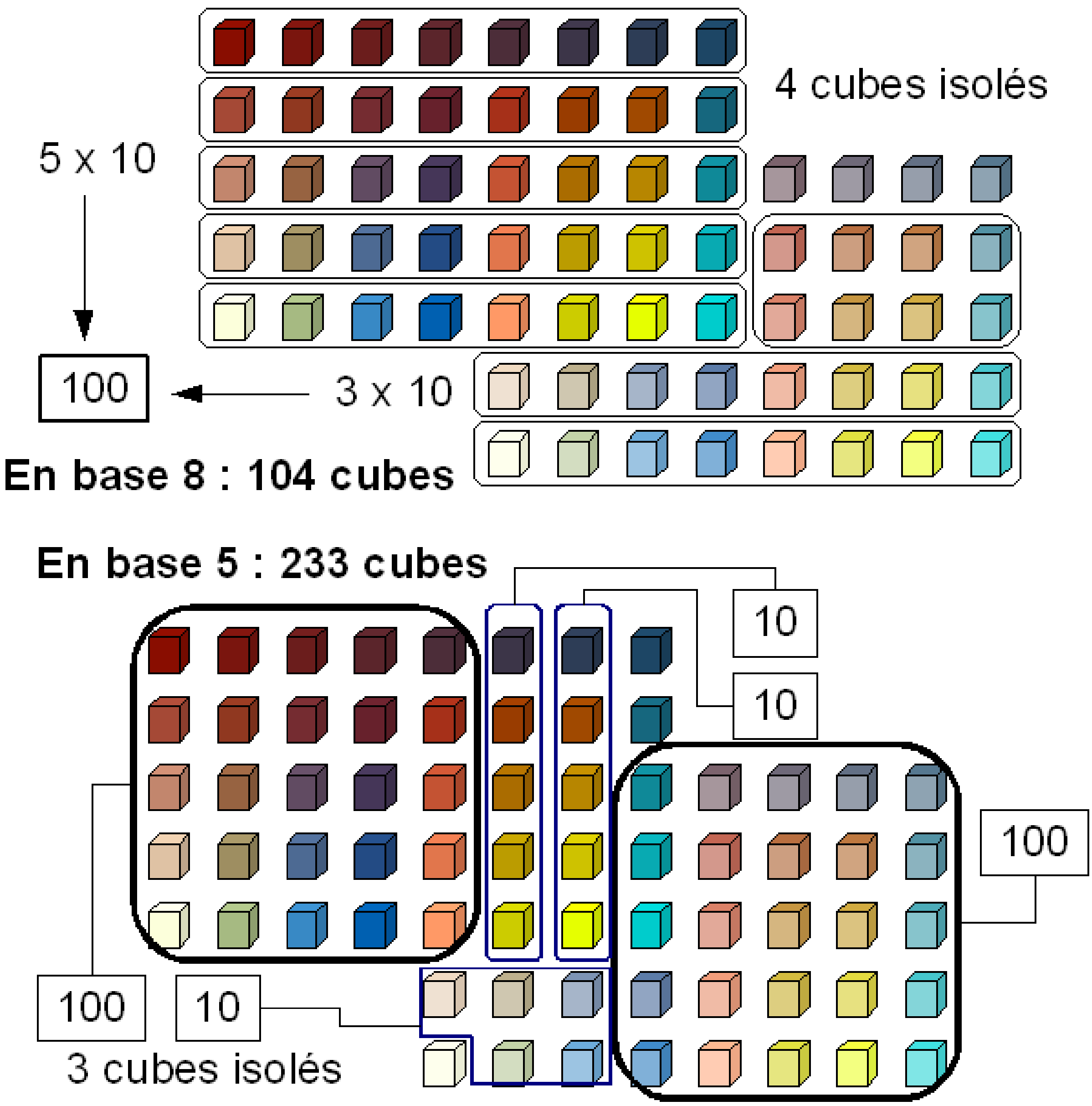
En traitant les données, on produit un système de 3 équations à solutions dans ℵ :
A - b + 6 = 0 ; b - c - 3 = 0 ; a + b + c = 15 où abc désigne le nombre cherché. On en déduit le nombre cherché, soit 285.

V 10 [Montpellier 1998]

Exercice pénible sinon compliqué. Voici le corrigé *officiel* :
Q 1 (3)(0)(17)(48) s'écrit en base dix : 48 + 17 x 60 + 3 x 603 = 649 068.
Q 2 54 325 432 s'écrit en base soixante : (4)(11)(30)(23)(52). On obtient cette suite de «chiffres» en divisant 54 325 432 par 60, ce qui donne (52) comme reste et 905423 comme quotient, puis en divisant à nouveau le quotient par 60, ce qui donne (23) comme reste, etc., jusqu'au dernier quotient qui est 11 et au dernier reste qui est 4.
On peut aussi procéder en recherchant les valeurs des différentes puissances de 60, jusqu'à encadrer le nombre proposé par 604 et 605, puis faire le quotient de 54 325 432 par 604 ce qui donne (4) comme quotient ; on divise alors le reste obtenu par 603, ce qui donne (11) comme quotient, etc. (52) est alors le reste de la division par 60.
Q 3a : Pour que l'écriture soit correcte, il faut que a et b soient inférieurs à 6.
Q 3b : N = (ab) x 60 + (ba) = (a x 10 + b) x 60 + (b x 10 + a) = 601 x a + 70 x b. 70 est un multiple de 5. Si N est un multiple de 5 alors 601 x a doit être un multiple de 5. Comme 601 n'est pas un multiple de 5, alors a est un multiple de 5, c'est à dire 0 ou 5. N est donc de la forme (b)(b0) ou (5b)(b5).

Q 3c : (b)(b0) est inférieur à (10)(00), c'est à dire à 600. Ce cas est donc exclu. Reste l'autre cas, et N peut donc s'écrire de deux façons : 1000 x b+ 210 + 5 d'une part et d'autre part (50 + b) x 60 + b x 10 + 5. De l'égalité obtenue, on tire 2790 = 930 x b, d'où b = 3. Donc, $\boxed{N = 3215}$.

Extra



$\underline{104_8}$ $= 8^2 + 4 = (5 + 3)^2 + 4$

$= 5^2 + 2x5x3 + 3^2 + 4$

$= 5^2 + 5 \times (5 + 1) + 5 + 4 + 4$ car $3^2 = 5 + 4$ et $2x3 = 3 + 3 = 5 + 1$

$= 5^2 + 5 \times (5 + 1) + 5 + 5 + 3$

Donc :

$\underline{104_8}$ $= 5^2 + 5^2 + 5 + 5 + 5 + 3$

$= 5^2 \times 2 + 5 \times 3 + 3 = \underline{233_5}$

S. F. 86 = $\underline{321_5}$ = $\underline{126_8}$ Prévoir deux rectangles de 8x5 pierres plus un rectangle de 2x3 pierres …