Le jeu des deux tas d'or

On dispose de deux tas. Il peut s'agir d'allumettes, de jetons ou de tout autre petite collection. L'or du titre trouvera son explication à la fin de cette note.

Deux joueurs s'affrontent. A tour de rôle, chacun pioche un certain nombre d'objets dans un tas ou dans l'autre, ou dans les deux tas, mais en ce cas la pioche est égale dans chacun des deux tas.

Gagne le joueur qui pioche le dernier élément restant.

On peut repérer l'état des deux tas par un couple de nombres (X,Y) et donc visualiser cet état sur un graphe bidimensionnel.

Le jeu des deux tas d'or est donc équivalent au

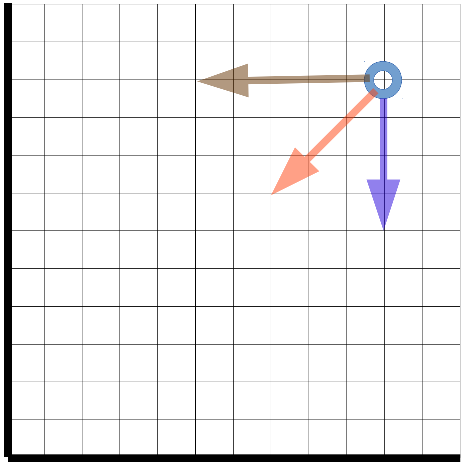
Jeu du Dornim

Sur un quadrillage, on pose un jeton. Deux joueurs s'affrontent. A tour de rôle, chacun fait glisser le jeton, horizontalement, verticalement, ou en diagonale.

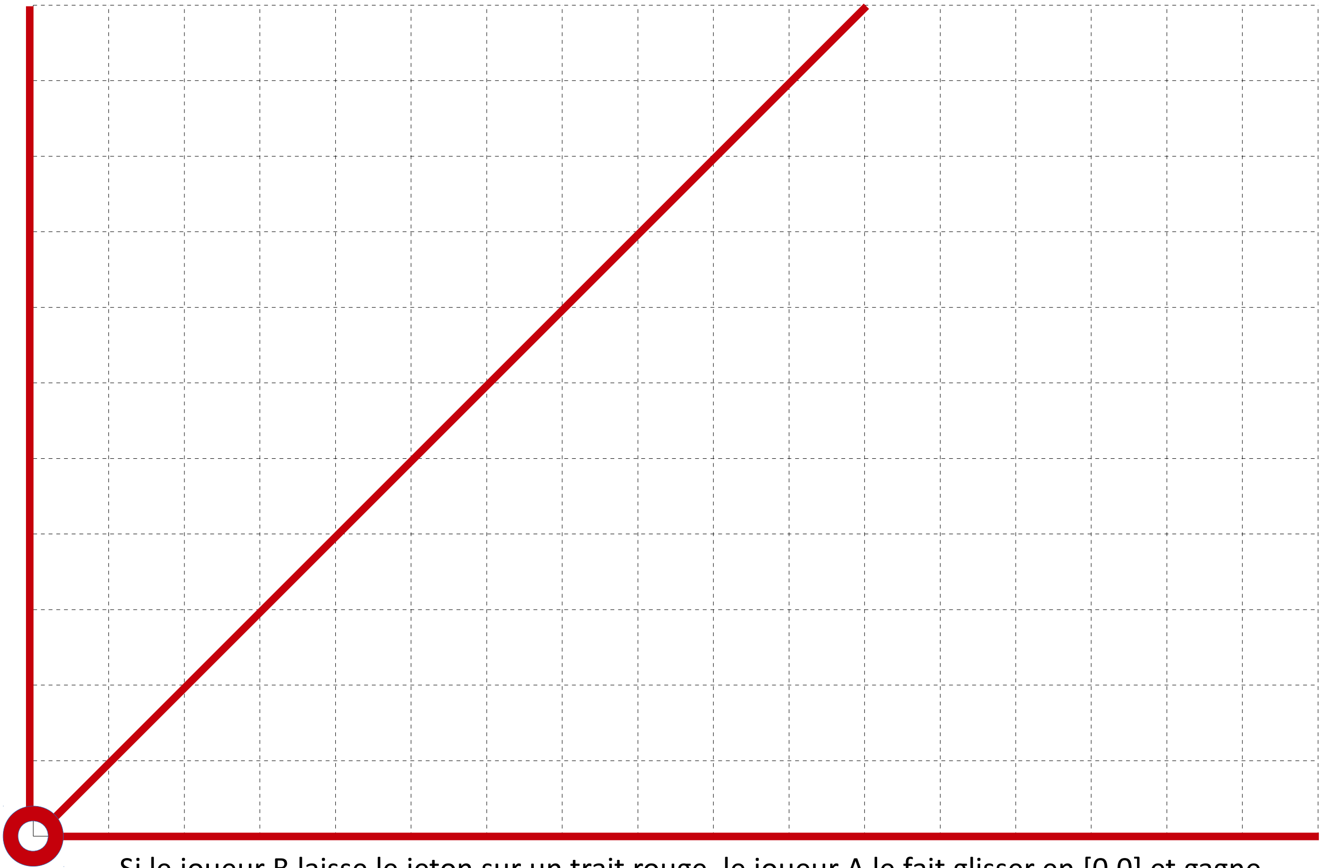
Gagne le joueur qui arrive dans le coin inférieur gauche.

Ce jeu, connu sous le nom de jeu de Wythoff, est un jeu impartial, qui admet une stratégie gagnante. Ici, c'est le joueur qui joue en premier qui doit gagner s'il joue rationnellement.

L'analyse passe par la recherche des positions gagnantes, sous entendu pour le joueur A. On entend par là des positions acquises par ce joueur, et telles que quoique fasse le joueur B, A soit certain d'arriver en (0,0). La recherche se fait à rebrousse-chemin.

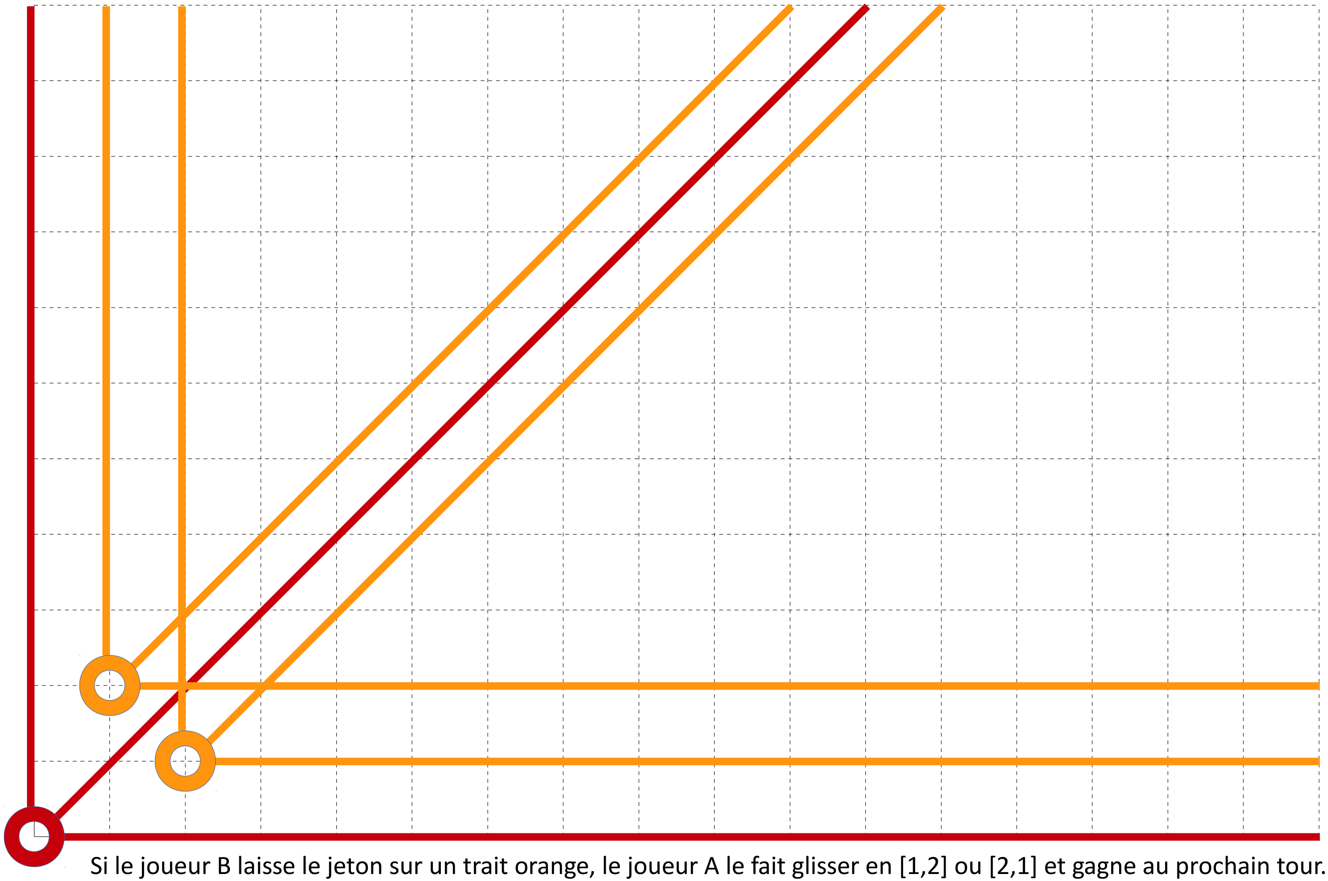


La position (0, 0) est gagnante ; elle condamne les positions en enfilade.



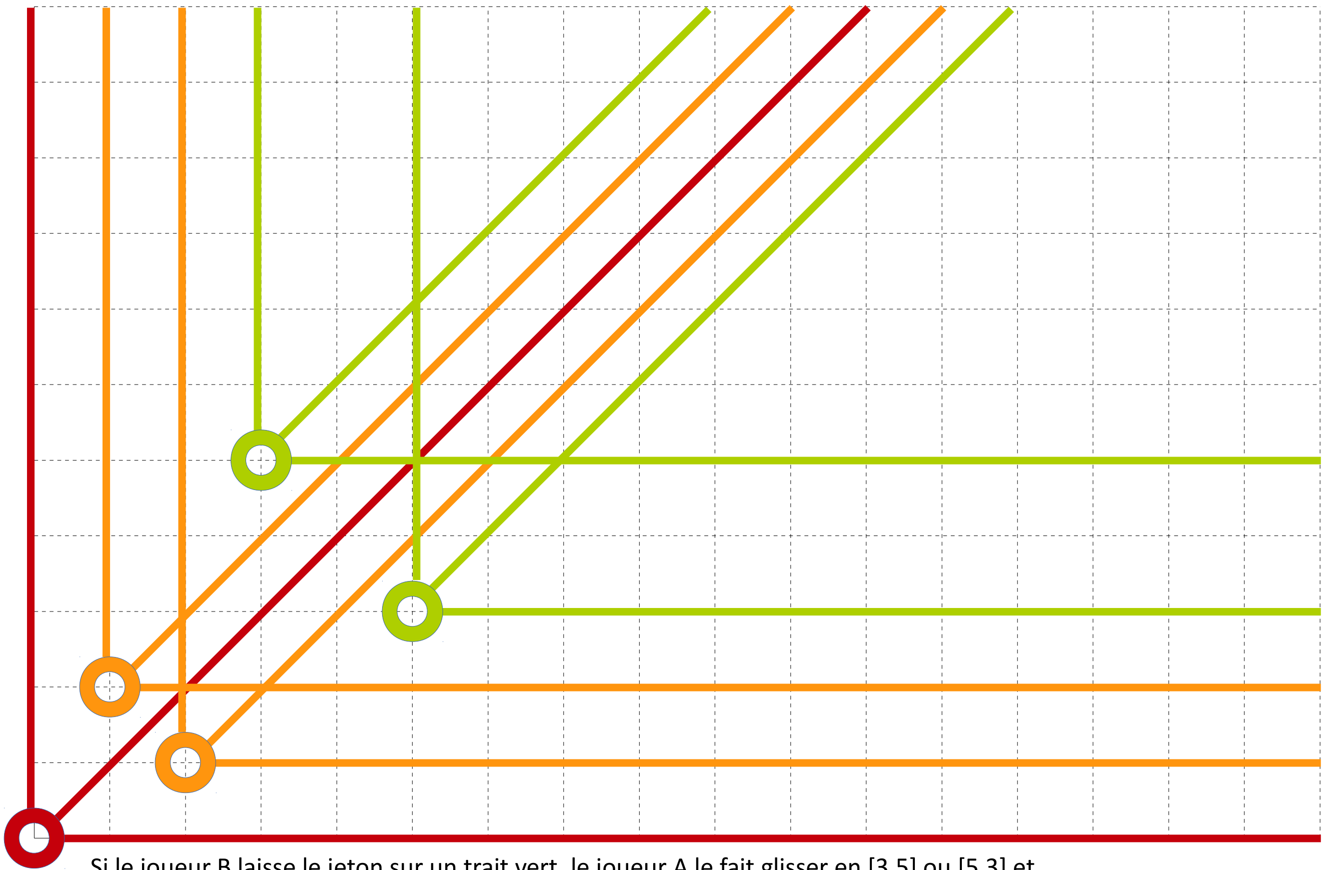
Si le joueur B laisse le jeton sur un trait rouge, le joueur A le fait glisser en [0,0] et gagne.

Les positions (1, 2) et (2,1) sont gagnantes ; elles condamnent les positions en enfilade.



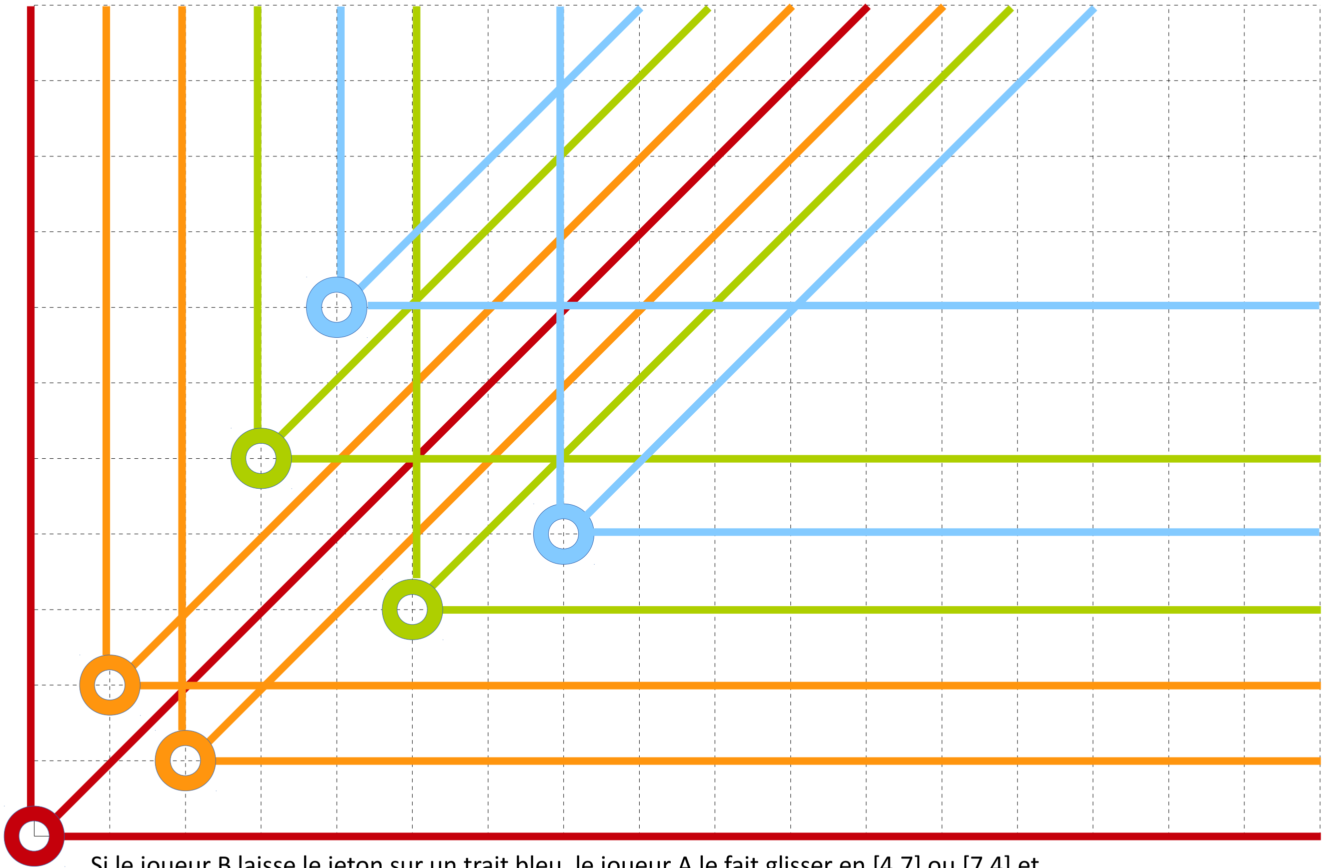
Si le joueur B laisse le jeton sur un trait orange, le joueur A le fait glisser en [1,2] ou [2,1] et gagne au prochain tour.

Les positions (3, 5) et (5,3) sont gagnantes ; elles condamnent les positions en enfilade.



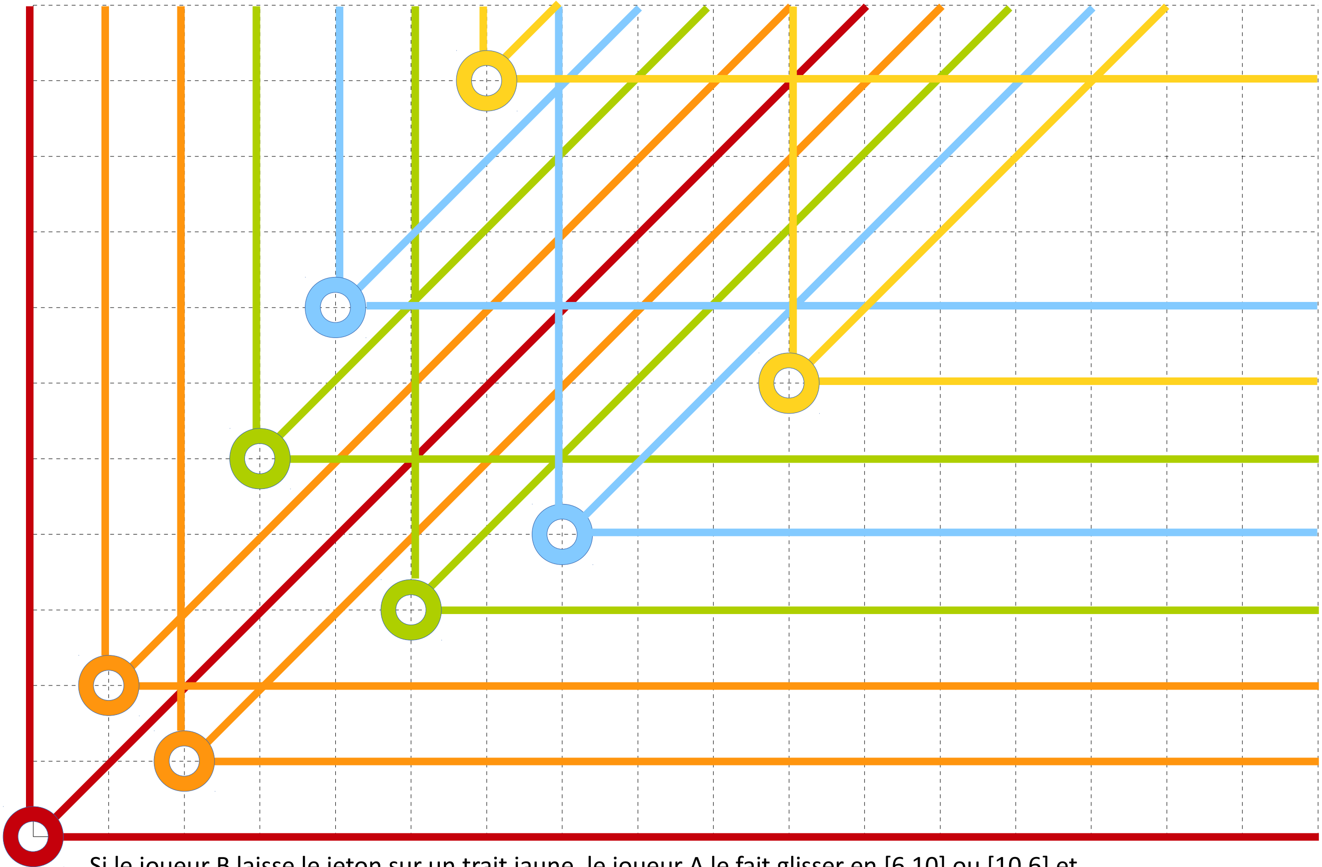
Si le joueur B laisse le jeton sur un trait vert, le joueur A le fait glisser en [3,5] ou [5,3] et ...

Les positions (4, 7) et (7,4) sont gagnantes ; elles condamnent les positions en enfilade.



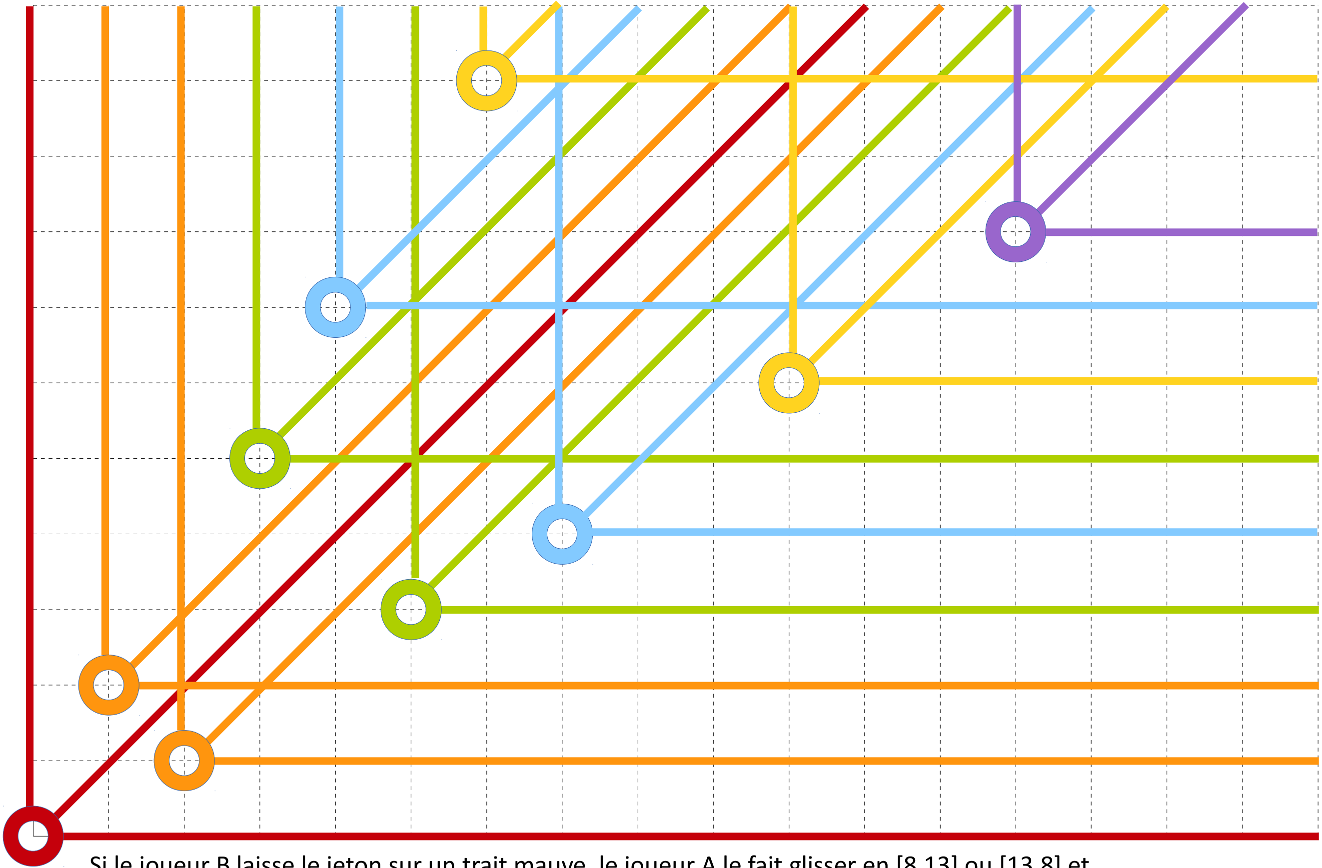
Si le joueur B laisse le jeton sur un trait bleu, le joueur A le fait glisser en [4,7] ou [7,4] et ...

Les positions (6, 10) et (10,6) sont gagnantes ; elles condamnent les positions en enfilade.



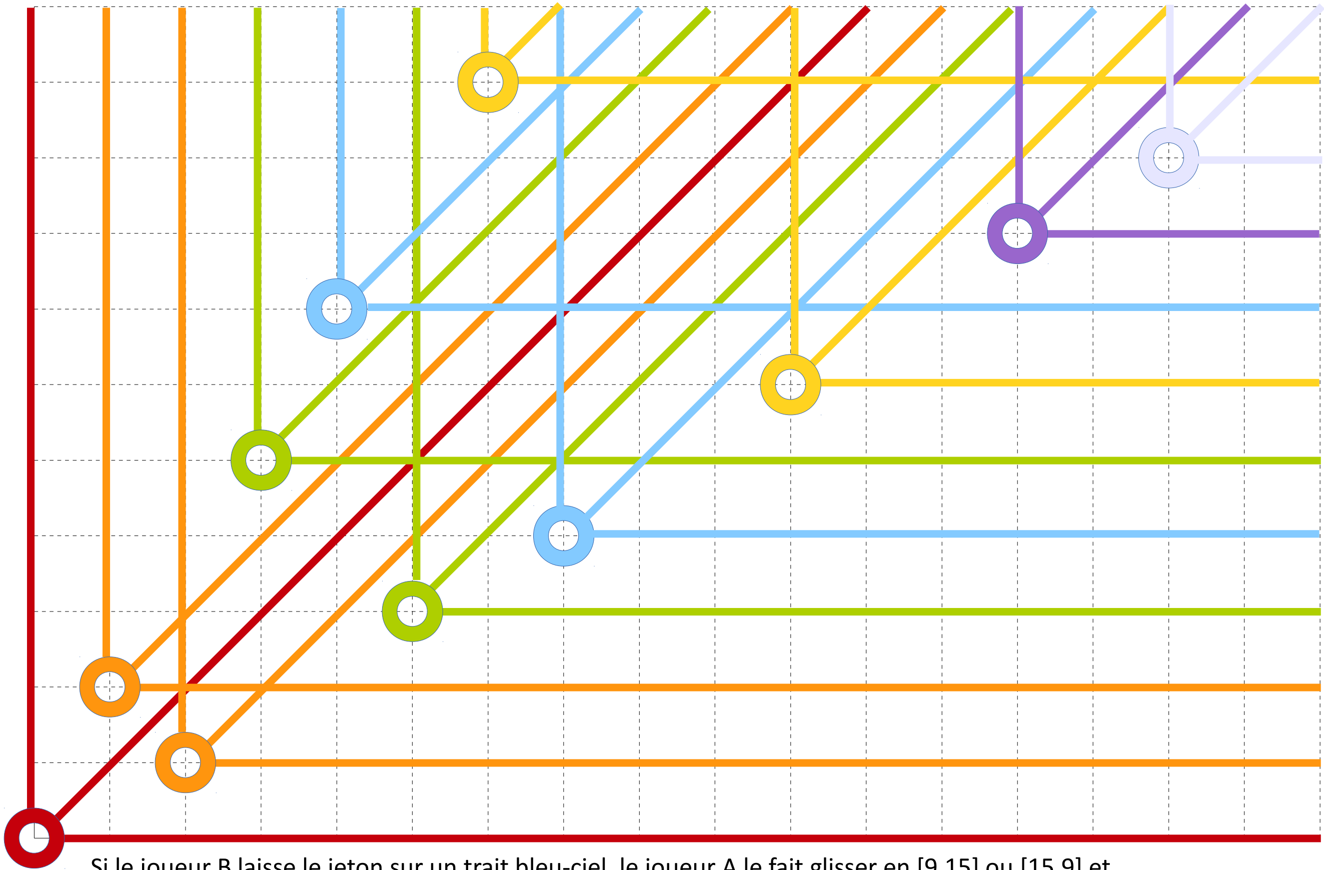
Si le joueur B laisse le jeton sur un trait jaune, le joueur A le fait glisser en [6,10] ou [10,6] et ...

Les positions (8, 13) et (13,8) sont gagnantes ; elles condamnent les positions en enfilade.



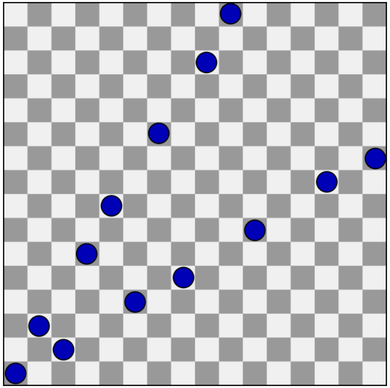
Si le joueur B laisse le jeton sur un trait mauve, le joueur A le fait glisser en [8,13] ou [13,8] et ...

Les positions (9, 15) et (15,9) sont gagnantes ; elles condamnent les positions en enfilade.



Si le joueur B laisse le jeton sur un trait bleu-ciel, le joueur A le fait glisser en [9,15] ou [15,9] et ...

Pour une stratégie gagnante



[Ci-contre le jeu du Dornim dans une version damier. Les points bleus marquent les positions gagnantes).

On repère qu'on ne peut passer en un seul coup d'une position gagnante à une autre. Dit autrement, si un joueur doit déplacer le jeton depuis une position gagnante, alors il est sûr de perdre cet avantage : en revanche, son adversaire pourra certainement replacer le jeton sur une nouvelle position gagnante, plus proche du but.

On en déduit la stratégie pour le joueur A qui joue en premier. Le jeton est posé quelque part sur la grille puis c'est au joueur A de le déplacer.

Si le jeton n'est pas sur une position gagnante, le joueur A l'y amène. Sinon, le joueur déplace le jeton d'une ou deux cases, pour donner le change, en espérant que son adversaire ne connaisse pas l'algorithme gagnant.

On notera que sur un carré de n par n cases, il y a au plus n positions gagnantes. La probabilité que le jeton soit déposé sur une case gagnante est donc inférieure à 1/n, soit 1 chance sur 16 pour l'exemple ci-dessus. Le joueur A qui sait jouer a donc une chance non négligeable de pouvoir l'emporter.

On notera les conséquences de cette observation : comme pour tous les jeux impartiaux, si les deux joueurs maîtrisent la stratégie gagnante, il n'y a plus de jeu ! De même, il n'est pas difficile d'implanter ce jeu sur un ordinateur, mais le jeu n'aura pas d'intérêt pour le joueur humain, qui est sûr de perdre, sauf à conférer au programme une relative ignorance initiale …

Reste à comprendre la distribution des positions gagnantes.

Repérage des positions gagnantes en dessous de la bissectrice (X > Y)

[Le repérage des positions gagnantes au dessus de la bissectrice s'obtient en échangeant les X et les Y obtenus ci-dessous.]

On tient le tableau suivant :

Rang (d)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Ordonnée (Yd)	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	22	24	25	27	29	30	32
Abscisse (Xd)	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	36	39	41	44	47	49	52

On repère : 1/ Xd = Yd + d ; Donc, quand on connait l'ordonnée, on connait l'abscisse
2/ Les ordonnées augmentent de 1 ou 2 quand le rang croît.

Malheureusement, il n'est pas facile de prédire cette augmentation en un seul bloc.
Mais on peut observer un phénomène permettant de construire la table de proche.

Soit d un rang donné. Si on retrouve sa valeur dans la ligne des abscisses avant ce rang, alors l'ordonnée pour le rang suivant (d + 1) est le successeur de l'ordonnée pour le rang d.

Exemple : Pour le rang 7, l'ordonnée est Y7 = 11, mais 7 est l'ordonnée pour le rang 3 : Y3 = 7
7 est l'ordonnée pour le rang 3 et on constate que Y8 vaut 12.

Cette observation fonctionne pour les rangs de la suite {2, 5, 7, 10, 13, …}

On repère facilement que pour tous les autres rangs l'écart des abscisses est de 2.

Exemple : 9 n'est pas dans la liste des abscisses, donc Y10 = Y9 + 2 (soit 16 puisque Y9 = 14).

Repérage complet des positions gagnantes en dessous de la bissectrice (X > Y) 1/2

	A	B	C	D	E	F	G
2		d	**yd**	xd	Nombre Or :	1,61803399	
3		0	**0**	0	yd/d	xd/yd	E(d*NbOr)
4		1	**1**	2	1	2	**1**
5		2	**3**	5	1,5	1,66666667	**3**
6		3	**4**	7	1,33333333	1,75	**4**
7		4	**6**	10	1,5	1,66666667	**6**
8		5	**8**	13	1,6	1,625	**8**
9		6	**9**	15	1,5	1,66666667	**9**
10		7	**11**	18	1,57142857	1,63636364	**11**
11		8	**12**	20	1,5	1,66666667	**12**
12		9	**14**	23	1,55555556	1,64285714	**14**
569		566	**915**	1481	1,61660777	1,61857923	**915**
570		567	**917**	1484	1,61728395	1,61832061	**917**
571		568	**919**	1487	1,61795775	1,61806311	**919**
572		569	**920**	1489	1,6168717	1,61847826	**920**
573		570	**922**	1492	1,61754386	1,61822126	**922**
574		571	**923**	1494	1,61646235	1,61863489	**923**
575		572	**925**	1497	1,61713287	1,61837838	**925**
576		573	**927**	1500	1,61780105	1,61812298	**927**
577		574	**928**	1502	1,61672474	1,61853448	**928**
578		575	**930**	1505	1,6173913	1,61827957	**930**

Avec un tableur, il n'est pas difficile d'éditer un tableau comme sur l'illustration ci-contre.

On remplit à la main les cellules B2 à D4.
Puis on sert les cellules B5 à D5 avec les formules suivantes :
Dans B5 : =1+B4 *Dans D5* : =B5+C5
Dans C5 : =SI(ESTNA(EQUIV(B4;D3:$D3;0));C4+2;C4+1)

Les formules dans B5 et D5 sont du niveau B2i. Les élèves de cycle 3 devraient savoir les poser.

La formule dans C5 est technique ; elle doit être fournie aux élèves.
On peut éventuellement expliciter la formule : le logiciel recherche dans la colonne des ordonnées, avant le rang d, si la valeur d-1 s'y trouve grâce à la fonction EQUIV ; si oui, on ajoute 1 à l'ordonnée de rang d-1, sinon on ajoute 2 à cette ordonnée.
Le test “y est, y est pas” est le fruit de la fonction ESTNA.

Il suffit maintenant de sélectionner les trois cellules B5:D5 et de tirer vers le bas, touche [Ctrl] maintenue enfoncée, pour propager les valeurs et construire la table des positions gagnantes assez loin.

Sur la figure ci-dessus, on a installé deux autres colonnes, retenant les rapports successifs Yd/d et Xd/Yd.

Je reviens sur ces deux colonnes page suivante.

Repérage complet des positions gagnantes en dessous de la bissectrice (X > Y) 2/2

	A	B	C	D	E	F	G
2		d	**yd**	xd	Nombre Or :	1,61803399	
3		0	**0**	0	yd/d	xd/yd	E(d*NbOr)
4		1	**1**	2	1	2	**1**
5		2	**3**	5	1,5	1,66666667	**3**
6		3	**4**	7	1,33333333	1,75	**4**
7		4	**6**	10	1,5	1,66666667	**6**
8		5	**8**	13	1,6	1,625	**8**
9		6	**9**	15	1,5	1,66666667	**9**
10		7	**11**	18	1,57142857	1,63636364	**11**
11		8	**12**	20	1,5	1,66666667	**12**
12		9	**14**	23	1,55555556	1,64285714	**14**
569		566	**915**	1481	1,61660777	1,61857923	**915**
570		567	**917**	1484	1,61728395	1,61832061	**917**
571		568	**919**	1487	1,61795775	1,61806311	**919**
572		569	**920**	1489	1,6168717	1,61847826	**920**
573		570	**922**	1492	1,61754386	1,61822126	**922**
574		571	**923**	1494	1,61646235	1,61863489	**923**
575		572	**925**	1497	1,61713287	1,61837838	**925**
576		573	**927**	1500	1,61780105	1,61812298	**927**
577		574	**928**	1502	1,61672474	1,61853448	**928**
578		575	**930**	1505	1,6173913	1,61827957	**930**

C'est un réflexe de matheux !

On tient une série de couples *(X, Y)* qui commence en *(0,0)* et croit peu à peu. On peut représenter cette série dans un repère orthonormé. [De facto, la représentation existe déjà puisque nous l'avons produite pas à pas en cherchant les positions gagnantes !]

Et donc, nous nous posons la question de l'existence d'une droite, qui passerait plus ou moins *au milieu* du nuage des points.

Cette droite passe par l'origine. Sa pente *moyenne* les ratio *Yd/Xd*. On est donc amené à calculer ces rapports, pour observer leur évolution.

C'est l'objet de la colonne F. Asssez vite, la valeur calculée commence par 1,618. Il est légitime d'y reconnaître les prémisses du nombre d'or soit Phi = 1,618033989 au milliardième près .

La colonne G vient cautionner cette idée. Dans la cellule *F2* on évalue une approximation du nombre d'or : *=0,5*(1+RACINE(5))*

Puis on calcule les parties entières de ses multiples. C'est ce qui est fait via la formule déposée en *G4* puis tirée vers le bas jusqu'en *G578 : =ENT(B4*F2).* Et là, Bingo : Comparez les colonnes C et G !

Nous tenons la loi : si nous repérons les positions gagnantes sous la bissectrice par leur rang, l'ordonnée pour un rang donné n'est rien que le produit de la partie entière du produit du nombre d'or par ce rang. Et l'abcisse s'obtient en ajoutant le rang à l'abscisse.

D'où le titre du jeu. Certes, on peut imaginer l'oncle Picsou affrontant son neveu Donald, mais surtout l'or renvoie au nombre éponyme.