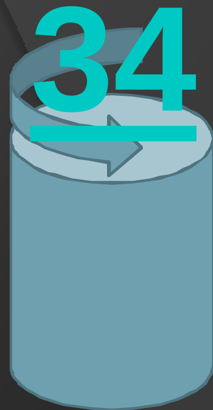
DU CALCUL EN GÉNÉRAL



D. Bertin IUFM V

Sommaire simplifié

- A1/ Origine du calcul
- A2/ Qu'est-ce que le calcul ?
- A3/ Règles
- A4/ Disponibilités nécessaires
- A5/ Flexibilité du calcul
- B1/ La trilogie 2002 du calcul à l'école
- B2/ Le refondation 2008

A1: Origine du calcul (1/7)

- Le terme calcul vient du mot latin calculus/calculi qui renvoie aux cailloux que les Romains utilisaient pour calculer dans des pratiques sociales diverses.

Mais l'emploi des "pitis" cailloux est beaucoup plus ancien !

A1: Origine du calcul (2/7)

- Le calcul apparaît dès que des échanges commerciaux se font jour.
- On en trouve trace en Mésopotamie 8000 ans avant JC :

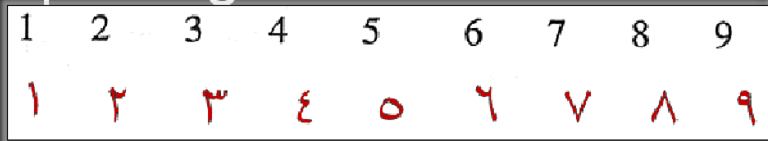
  Des cailloux de différentes formes, de différentes couleurs sont utilisés pour distinguer les ordres de grandeur.
- Ces cailloux sont remplacés par des objets en argile aux formes stéréotypées, prélude aux chiffres : Sumer 3300 av JC

A1: Origine du calcul (3/7)

- Les calculi permettaient de compter et de calculer, car les peuples anciens ne disposaient pas d'un système de notation.
- Même quand l'écriture fut inventée, elle ne déboucha pas sur l'invention d'algorithmes commode de calcul.
- Deux raisons :
  1/ Pas encore de numération de position
  2/ Pas de régularité dans les systèmes d'unités utilisés pour mesurer et compter.

A1: Origine du calcul (4/7)

- Illustration au moyen-âge (a).
- Le zéro n'existe pas encore, mais nos chiffres sont presque là grâce à Gerbert d'Aurillac :



- Les changements d'unités ne sont pas décimalisés :

  l'argent se compte en Livres, Deniers, Sols
  1 Livre = 240 deniers = 480 oboles = 20 sous (livre Tournoise)

A1: Origine du calcul (5/7)

1 livre = 20 sous (ou 20 sols),
1 sou = 12 deniers à Tours, 15 à Paris
1 obole = 1/2 denier,
1 pistole = 10 livres,
1 liard = 3 deniers.

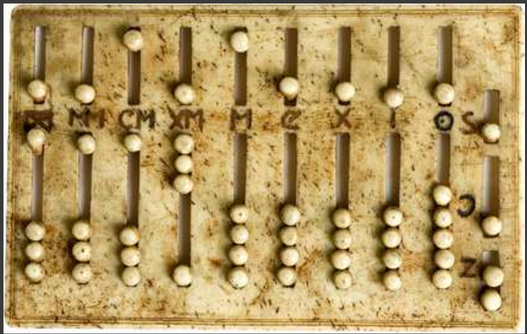
- Illustration au moyen-âge (b).

- *Problème* :

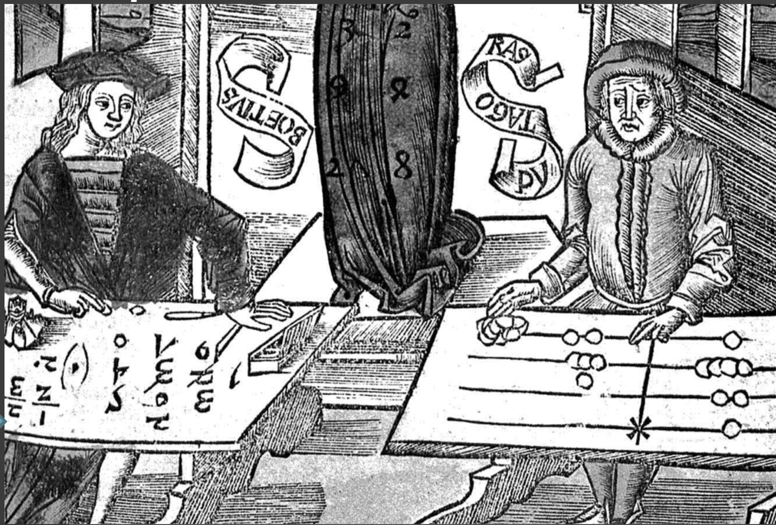
  Petit Jean doit ramener au curé et au viguier de son village un cochon de lait à 2 livres 10 sous et 3 centaines de grenouilles à 3 sols 6 deniers le cent. Il paye en sous de Paris et se fait rembourser en sous de Tours. Combien chacun paiera sachant que le viguier prend les deux tiers et le curé un seul tiers ?

A1: Origine du calcul (6/7)

- Illustration au moyen-âge (c)
- Pas d'autre solution pour calculer que de faire appel à des tables à calculer, prolongement des abaques romains.

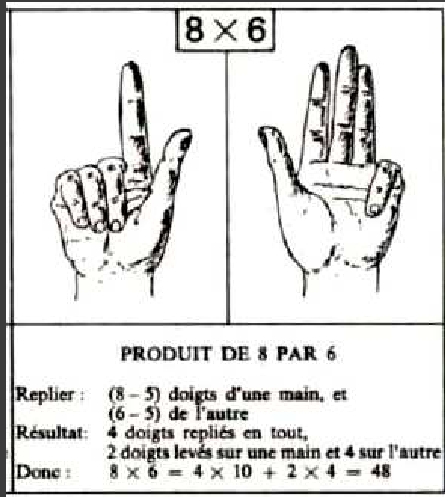


Algoriste contre albaciste



A1: Origine du calcul (7/7)

- Une autre façon de compter et de calculer, fut très tôt inventée : le calcul digital.
- Les Incas utilisèrent leurs vingt doigts pour fonder un système original en base 20 et nommer leurs chiffres.



A2: Qu’est-ce que le calcul? (1/7)

- Dans la langue courante (sens figuré):

  Calcul: ensemble des moyens qu’on combine, des mesures qu’on prépare en vue du succès d’une affaire.

- Il a agi par calcul.
  Faire un mauvais calcul.
  Cela n’entre pas dans mes calculs.
  Il a déjoué tous les calculs.

A2: Qu’est-ce que le calcul? (2/7)

- Dans la langue courante (sens propre):

  calcul numérique,

  plus généralement, l’arithmétique.

  Dans cette école, on enseigne le calcul.
  Le niveau de calcul a encore baissé …
  Les élèves doivent savoir calculer à l'entrée en sixième …

A2: Qu'est-ce que le calcul? (3/7)

- Il est beaucoup plus difficile de donner une définition acceptable par la communauté des mathématiciens.
- Osons :

  En mathématique, un calcul est une combinaison d'*objets mathématiques* (représentés par des symboles) obtenue grâce à des opérations, selon des règles précises, afin d'obtenir un résultat.

  {Dans cette définition, tous les mots en bleu attendent eux-mêmes une définition !}

A2: Qu’est-ce que le calcul? (4/7)

- Il n'y a pas un mais des calculs en Maths :

  calcul algébrique, barycentrique, vectoriel, tensoriel, différentiel, intégral, propositionnel, formel, trigonométrique, matriciel, exponentiel, booléen, statistique, binaire, numérique, etc.

- L'art du mathématicien est de savoir utiliser le calcul approprié à un instant donné, quitte à changer de cadre de temps en temps.

  Je développe ces points ci-après.

A2: Qu'est-ce que le calcul? (5/7)

- Pour nous, candidat(e)s au CRPE :

Le calcul est numérique !

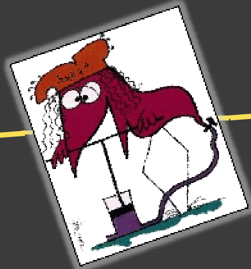
Décimal ?

Au choix

- algébrique,
- arithmétique,
- approché.

$$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}$$

$$\begin{cases} 13\,x - 2\,y = 12 \\ 25\,x + 3\,y = 30 \end{cases}$$



3 Shadocks pompent 3 litres en 3 heures.
Combien de litres 30 Shadocks pomperont-ils en 30 heures ?

C'est les soldes !
Un prix passe de 35 € à 33 € …
Valeur relative de la baisse (en %)

2007-2011

A2: Qu’est-ce que le calcul? (6/7)

Algos efficaces

- Le calcul -numérique- suppose :

¤ la parfaite compréhension de notre système de numération décimale de position :

valeur des chiffres selon leur position

conversion 10 pour 1

(⇒ retenues, règle des zéros)

¤ la compréhension qu'une valeur peut être exprimée de diverses façons

canoniques: 45 16 2/7 0,2 $3,57.10^{6}$ $8,23.10^{-8}$

non canoniques: 3x15 4^{2} 22/77 7/35 0,357E7 0,823N7

A2: Qu'est-ce que le calcul? (7/7)

- Le calcul suppose, pour être mené à bien :

  ¤ la maîtrise des règles de transformation (propriétés, syntaxe des opérations)
  ¤ la nécessaire disponibilité de répertoires tables, formules, *coups de main*
  ¤ une très grande flexibilité, c'est-à-dire la possibilité de changer de cadre.

  Voir exemples dans les sections suivantes .

A3: Règles (1/4)

- On calcule avec deux opérations : + (-) et x
- Ces deux opérations sont commutatives :

$$a + b = b + a \qquad a \times b = b \times a$$

- Elles sont aussi associatives :

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 1 + 4 + 2 + 3 + 5 = 3 \times 5 = 15$$

$$14 \times 15 = 7 \times 2 \times 3 \times 5 = 3 \times 7 \times 2 \times 5 = 21 \times 10 = 210$$

- L'une est distributive par rapport à l'autre :

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$51 \times 15 = 50 \times (10 + 5) + 15 = 500 + 250 + 15 = 765$$

A3: Règles (2/4)

- Simplification des écritures multiplicatives : Appel aux exposants.
- Rappel de définitions :

  $a^n = a \times \ldots \times a$ {n termes} $\quad a^{1/n} = b \Leftrightarrow b^n = a$

  $a^{-n} = 1/a^n \quad a^{1/2} = \sqrt{a}$

  $(\sqrt{a})^2 = a$ mais $\sqrt{a^2} = |a|$

- Propriétés :

  $a^p \times a^q = a^{(p+q)} \quad a^p \div a^q = a^{(p-q)}$

  $\sqrt{22932} = (6^2.7^2.13)^{1/2} = 6.7.\sqrt{13}$

  $(a^p)^q = a^{(p \times q)}$

  $a^n \times b^n = (a.b)^n \quad a^n / b^n = (a/b)^n$

  Mais attention : $(a+b)^n \neq a^n + b^n$

A3: Règles (3/4)

- Simplification des écritures fractionnaires :

  Rappels simples : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$ $\quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.c}$

  Application : $\frac{k.P}{k.Q} = \frac{k}{k} \times \frac{P}{Q} = 1 \times \frac{P}{Q} = \frac{P}{Q}$

- Échafaudages:

  Attention aux écritures ambigües :

  $$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a \div \frac{b}{c} = \frac{a.c}{b}$$

  $$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \div c = \frac{a}{b.c}$$

- Dénominateur commun

  $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

  $$\frac{a+c}{b+d} \neq \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$$

On simplifie avant tout calcul

A3: Règles (4/4)

- **Inégalités :**

  $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

  $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

  Mais attention :

  $a < b$ et $c > 0 \Rightarrow a.c < b.c$ (idem avec $\leq$)

  $a < b$ et $c \leq 0 \Rightarrow a.c > b.c$ (idem avec $\leq$)

- **Élévations:**

  $a < b \Rightarrow a^2 < b^2$

  (idem avec $\leq$)

  Mais :

  $a^2 < b^2 \Rightarrow |a| < |b|$

<u>Astuce</u> : $a^2 < b^2 \Leftrightarrow (b - a)(b + a) > 0$

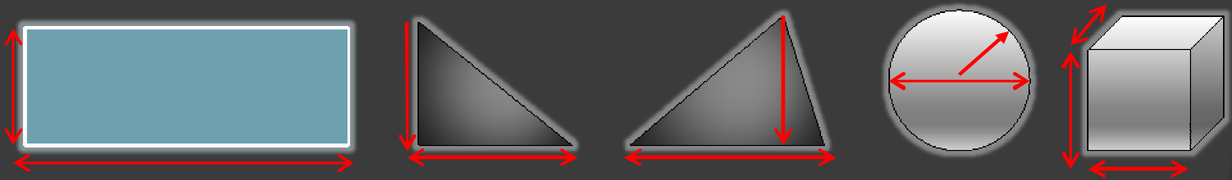
Donc pour chercher les points $M(x,y)$ vérifiant $x^2 < y^2$ on cherche les points vérifiant : $\begin{cases} x - y < 0 \\ x + y < 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - y > 0 \\ x + y < 0 \end{cases}$

A4: Nécessaires disponibilités (1/9)

- Les répertoires :
  ¤ les tables d'addition et de multiplication structurées et dynamiques (Cf. docs. externes)
  - structure de la diagonale
  - les doubles, les presque-doubles (+)
  - les carrés (x)
- ¤ les tables dépassent le strict minimum :
  - jusqu'à 15 + 15
  - jusqu'à 12 x 12
- Au CRPE, connaître sa table des nombres premiers jusqu'à 37.

A4: Nécessaires disponibilités (2/9)

- Formules à l'école primaire:
  - ¤ Sont encore peu nombreuses
  - ¤ Ne concernent que le champ de la mesure (aire et périmètre).



Aire = produit — Demi-périmètre = somme — des mesures des cotés

Aire = base par hauteur divisé par 2

$P=2.\Pi.R$

$P = \Pi.D$

$A = \Pi.R^2$

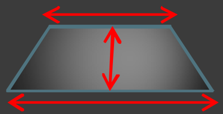
$A = \Pi.D^2/4$

$V=a^3$

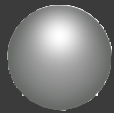
Quel dépit !

A4: Nécessaires disponibilités (3/9)

- Formules pour le CRPE :
  - ¤ Dans le champ du mesurage on adjoint :

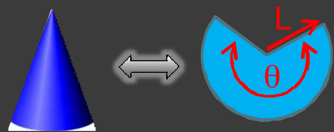


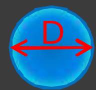
Aire =
hauteur par
demi-somme
des bases



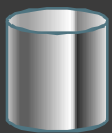
$V = 4/3 \, . \, \Pi \, . \, R^3$

$S = 4 \, . \, \Pi \, . \, R^2$





$\Pi \, . \, D = L \, . \, \theta$



Volume
=
base par hauteur

Volume
= 1/3 fois
base par hauteur

A4: Nécessaires disponibilités (4/9)

- Formules pour le CRPE :
  - ¤ Dans le champ numérique : Identités remarquables

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

  - ¤ Dans le champ géométrique

Aire du triangle équilatéral ? De l'hexagone ?

Pythagore

Thalès

Penser aux 'triades pythagoriciennes' :
3, 4, 5 | 5, 12, 13, | 7, 24, 25 | 8, 15, 17

A4: Nécessaires disponibilités (5/9)

- Les coups de main (1) :
  - ¤ Diviser pour mieux régner

Dans une expression complexe, isoler les termes, en les nommant, calculer chaque terme séparément puis effectuer la synthèse.

$$A = \dfrac{1 + \dfrac{1+2}{2+3}}{1 - \dfrac{3+4}{4+5}}$$

on isole :

$$B = 1 + \dfrac{1+2}{2+3} = 8/5$$

$$C = 1 - \dfrac{3+4}{4+5} = 2/9$$

d'où A = 5,6

A4: Nécessaires disponibilités (6/9)

- Les coups de main (2) :
  - ¤ Simplifier avant de calculer

-> rendre irréductibles les fractions

$$\frac{68}{408}+\frac{104}{416}=\frac{4\times 17}{24\times 17}+\frac{8\times 13}{32\times 13}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

-> chercher toujours les plus petits diviseurs communs (via ppcm).

-> chasser les carrés de sous les racines

$$\sqrt{729-\sqrt{81}}=\sqrt{9\ \times 81-9}=\sqrt{9\times 80}=3\times 4\sqrt{5}$$

A4: Nécessaires disponibilités (7/9)

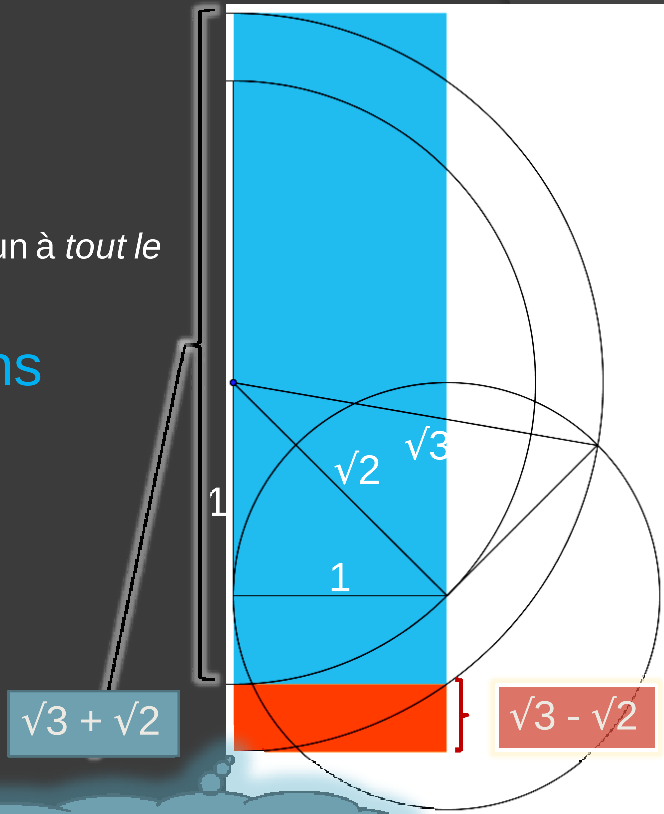
- Les coups de main (3) :
  - ¤ Factoriser quand c'est intéressant

-> le facteur dit commun doit être commun à *tout le monde*, pas à un petit bout du calcul.

  - ¤ Penser aux expressions conjuguées

$$\frac{c}{a-b} = \frac{c \times (a+b)}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$$



Les 2 rectangles sont semblables.

A4: Nécessaires disponibilités (8/9)

- Les coups de main (4) :
  - ¤ Oublier la calculette
  - ► on calcule formellement l'expression jusqu'à obtenir une expression incompressible.
  - ► seulement alors, on calcule une valeur approchée, et seulement quand c'est nécessaire ou demandé.

$$\frac{68}{408}+\frac{104}{416}=\frac{4\times 17}{24\times 17}+\frac{8\times 13}{32\times 13}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

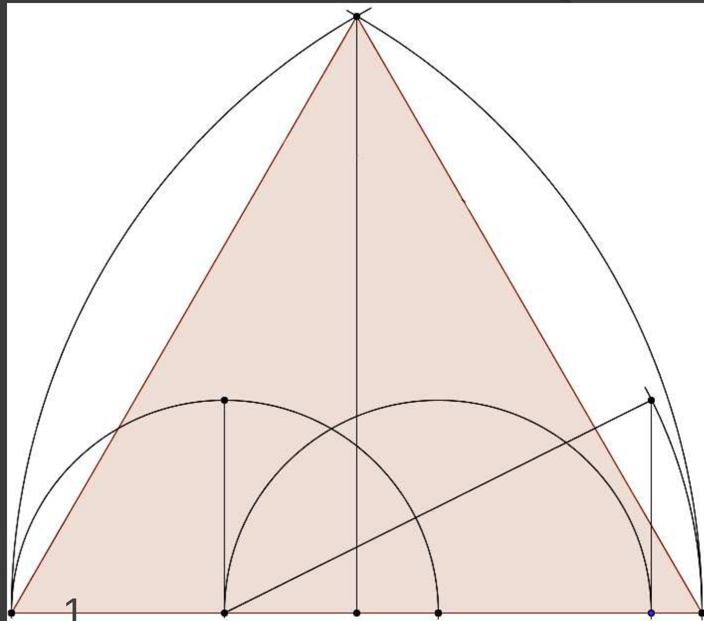
0,16+0,25
=0,41

Ici on tronque trop tôt les valeurs

Là on peut choisir la précision du résultat

A4: Nécessaires disponibilités (9/9)

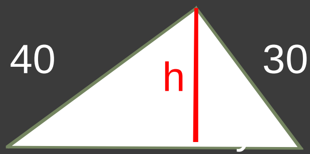
- Les coups de main (5) :
  - ¤ Oublier la calculette
  - ► Dans un calcul à tiroirs, on réutilise la dernière valeur exacte dans le calcul à venir, pas sa valeur approchée.



Aire du triangle équilatéral ?

A5: Flexibilité du calcul (1/4)

- On demande de calculer la hauteur :



Méthode algébrique :

$(x + y)^2 = 30^2 + 40^2$

$x^2 + h^2 = 40^2$

$Y^2 + h^2 = 30^2$

Méthode numérique :

L'hypoténuse vaut 50

Je calcule le double de l'aire de deux façons différentes :

$50 \times h = 30 \times 40$

A5: Flexibilité du calcul (2/4)

- On demande de simplifier l'expression :

$$A = \sqrt{153} + \sqrt{68}$$

Méthode algébrique

On élève au carré.

$A^2 = 153 + 68 + 2\sqrt{153 \times 68}$

Surprise : $153 \times 68 = 10404 = 102^2$
Donc $A^2 = 153 + 68 + 2 \times 102 = 425$

Donc $A = \sqrt{425}$

Méthode arithmétique

On cherche les carrés.

Surprise : $153 = 9 \times 17$
$68 = 4 \times 17$

Donc $A = 5\sqrt{17}$

A5: Flexibilité du calcul (3/4)

- On demande de calculer l'expression :

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}}}}}}$$

On a affaire à un échafaudage impossible.

On invoque $x \longrightarrow f(x) = 1 + 1/x$ que l'on réitère 8 fois à partir de la valeur 3.

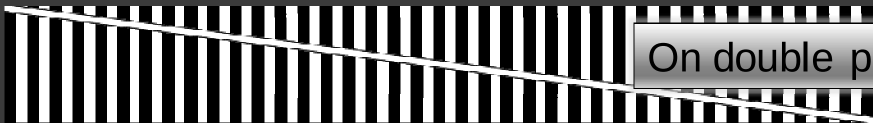
$3 \rightarrow 4/3 \rightarrow 7/4 \rightarrow 11/7 \rightarrow 18/11 \rightarrow 29/18 \rightarrow 47/29 \rightarrow 76/47 \rightarrow 123/76$

Fais même pas mal, le calcul …

A5: Flexibilité du calcul (4/4)

- On demande de calculer l'expression :
  1 + 2 + 3 + 4 + … + 8 + 9.
  On somme progressivement et on trouve 45.
- Maintenant on demande :

  On repère vite que l'on peut remembrer pour ajouter 1 à 99, 2 à 98, etc. jusqu'à 49 à 51. Mais que fait-on du 50 au centre ? C'est une vision géométrique qui va nous sauver.



On double puis on prend la moitié.

B1: Trilogie 2002 du calcul (1/4)

- Les programmes de 2002 introduisent 3 formes de calcul :
  - ¤ le calcul automatisé
  - ¤ le calcul réfléchi
  - ¤ le calcul instrumenté

A l'école primaire, pas d'autre calcul que numérique.

La notion de calcul approché était prise en compte dans les deux derniers items.

On trouvera dans les pages suivantes quelques commentaires rapides.

Un document plus approfondi attend les étudiants de M2.

B: Trilogie du calcul (2/4)

- Le calcul automatisé :
  - ¤ s'appuie sur des automatismes de calcul
  - ¤ restitution immédiate de tables (au sens large) dans le cas de calculs simples
  - ¤ calculs en ligne quand c'est possible
  - ¤ calculs en colonne sinon.

{Algorithmes opératoires}

25 x 8 mais pas 25 x 7
27 + 32 voire même 65 + 48 mais pas 578 + 1046
102 + 612 mais pas 671 + 549

B: Trilogie du calcul (3/4)

- Le calcul réfléchi :

¤ s'appuie sur certains automatismes de calcul, mais pas nécessairement tous.

¤ L'élève peut donc reconstituer des faits numériques manquant.

¤ les démarches possibles sont en général diverses. C'en est même l'intérêt.

¤ Le calcul mental appartient à cette catégorie.

$7 \times 8 = 7 \times 7 + 7$

Mais la capacité à restituer des *faits* numériques est prépondérante.

B: Trilogie du calcul (4/4)

- Le calcul instrumenté :

¤ intègre l'ensemble des dispositifs de calcul modernes : calculatrice, ordinateur (tableur).

¤ 3 pistes de réflexion :

1/ outil de calcul pour soulager dans le cas de la résolution de problèmes ;
2/ outil d'exploration de faits numériques ;
3/ outil de vérification ou de support d'exercices par exemple lors de séances de calcul réfléchi.

B2: Le calcul en 2008 (1/1)

- Les textes de 2008 ont profondément modifié les orientations précédentes. L'accent est ainsi mis sur :

  ¤ le calcul mental (et réfléchi ?)

  ¤ le calcul posé ou en ligne

  ¤ le calcul instrumenté à bon escient (sic).

- Fin ....