Utiliser différentes représentations pour résoudre des problèmes simples au CE.

Liens internet

http://francoiseduquesne.free.fr/theme3/Resoudre_des_problemes_mathematiques.pdf
Consulter les figures à partir de la page 8.

On ne peut pas se passer de http://pernoux.pagesperso-orange.fr/Problemes/problemes.pdf

Analyse à priori

¤ **L'intitulé concerne la résolution de problèmes simples** .
Cette résolution se fait au CE1 ou au CE2. Il convient de préciser :
Les espaces de nombres sur lesquels les élèves peuvent travailler :
de 100 à 1 000 au CE 1, de 1 000 à 1 million au CE 2
Les opérations disponibles :
Au CE 1 l'addition et partiellement la soustraction et la multiplication, au CE 2 ces trois opérations.

Qu'est-ce qu'un problème simple ?

On entend par là un problème
- dont le modèle de résolution est disponible, en application directe d'une notion ;
- ou qui demande des prises d'initiatives sans qu'il y ait de sous-question à résoudre. Il s'agit alors de situation visant la découverte d'une nouvelle notion.

Les problèmes simples sont plutôt considérés comme relevant du champ numérique, mais il existe aussi des problèmes dans le champ géométrique.

¤ **L'intitulé centre l'appel sur des représentations pour résoudre le problème.**
Plusieurs interrogations !

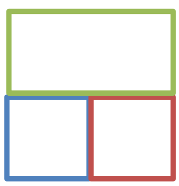
1/ Qu'est-ce qu'une représentation ?

¤ Dans le champ géométrique : une représentation peut se confondre avec un tracé géométrique ; il peut aussi s'agir d'une décantation du réel (berlingot de lait -> photo -> illustration) voire d'un schéma, par exemple à main levée. Le schéma vise à résumer les propriétés de l'objet étudié ; il peut aussi faciliter un tracé aux instruments à venir.

¤ Dans le champ numérique : une représentation vise à marquer les points fondamentaux, pour une meilleure vision en synthèse.

On citera : dessin plus ou moins figuratif, dessin simplifié (proche du schéma), schéma synthétique (qui résume suffisamment bien la situation pour que l'on s'en fasse une représentation mentale stable et efficace), schéma fonctionnel (pour reprendre les propositions de Descaves), organigramme (inspiré des outils heuristiques, il s'agit de repérer les données et leurs relations de façon graphique pour en déduire un procès de traitement). Sur tous ces points, voir en annexe mon papier sur les représentations.

A cette longue liste il faut ajouter les cascades. Il s'agit d'un organigramme hyper simplifié tenant partie du fait qu'une des données s'obtient à partir de deux autres données. D'où un schéma comme ci-contre dans lequel on peut remplir deux des trois cases du fait de l'énoncé proposé, directement dans le cas d'un problème simple, de sorte que la résolution consiste à remplir la troisième case.



2/ Qui propose la représentation ?

¤ Il peut s'agir de l'enfant. On évoque alors la notion de procédure imagée : le dessin tient du simulacre, la résolution est fortement actée.

¤ Il peut s'agir de l'enseignant qui cherche à aider l'élève, en vue :

- de faciliter le décodage de l'énoncé (surtout dans le champ additif),
- de déclencher ou optimiser un calcul (exemple typique : passage de l'addition itérée à la multiplication, problèmes de partage.)

Voir en annexe un extrait du site de D. Pernoux.

Dans les programmes

Le titre nous oblige à travailler à cheval sur Deux cycles. Mais on a beau fouiller, on ne trouve aucune évocation de ce thème ou presque !

¤ **Dans le socle commun (fin de CM2)** :

- résoudre des problèmes relevant des quatre opérations, de la proportionnalité, et faisant intervenir différents objets mathématiques : nombres, mesures, “règle de trois”, figures géométriques, schémas ;

Pour l'oral

¤ Il me semble difficile d'évoquer une séquence ; on doit se contenter de proposer des exemples de situations relevant du thème, en indiquant bien le statut de la représentation.

¤ Si l'on a la chance de disposer d'un manuel ou d'une documentation, extraire des éléments fournis des exemples de problème pour lesquels des représentations semblent évidentes ou probables.

¤ Si l'on ne dispose que du seul intitulé, essayer de brosser un panel théorique citant suffisamment d'exemples. Ces exemples exhiberont soit des procédures-élèves, soit des aides de l'enseignant.

[Consulter les 5 pages suivantes annexées à ce présent papier.]

Résolutions de problème et Représentations

Introit

Il existe plusieurs façons d'évoquer un problème. Certaines sont naïves et spontanées, d'autres élaborées et supposent un apprentissage spécifique, ou à tout le moins une rencontre.

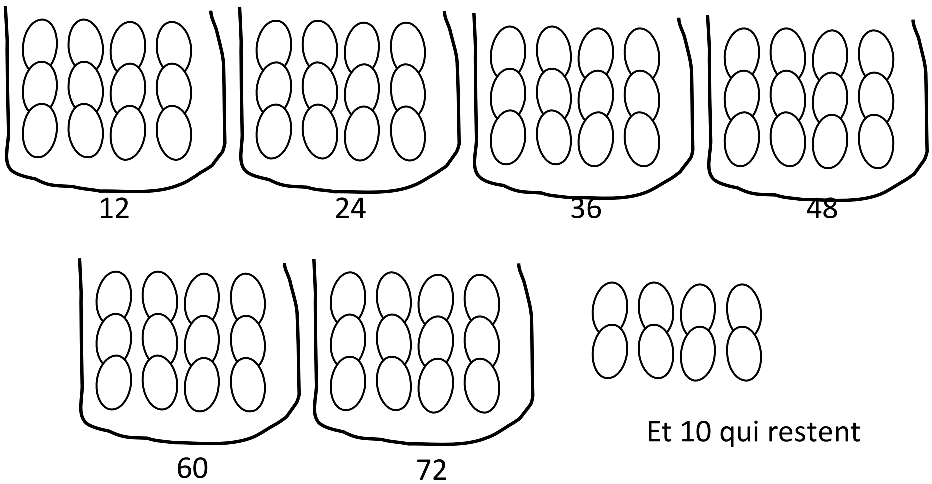
Certaines sont productives : on tient ou on tiendra la(les) réponse(s). Toutes ne sont pas adaptées à chaque problème. Elles ne sont pas toujours modélisantes.

Représentation sous forme de dessin

Exemple d'énoncé

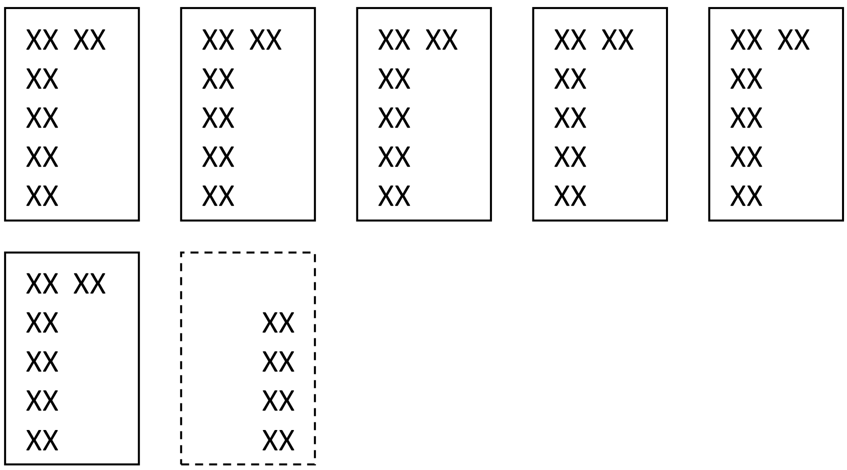
> *On veut ranger 80 œufs par boite de 12 …*

Dessin : l'enfant dessine patiemment des tas d'œufs à peu près organisés :



Le dessin est proche de l'action. Il contient plus ou moins le protocole d'une résolution possible. Ces démarches par dessin s'estompent après le CP.

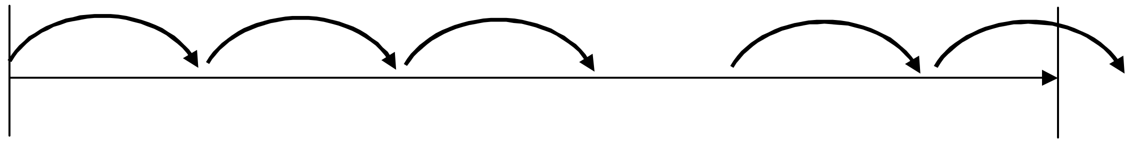
Schéma : l'enfant simplifie son dessin en essayant de trouver des régularités :



L'enfant est prêt à basculer dans une écriture additive. Dans les deux cas, le modèle n'est pas reconnu. On est en présence de solutions originales (ou personnelles).

Exemple d'énoncé

> *Tom fait des bonds de 7 m. En combien de bonds parcourra-t-il la piste de 60 m ?*



{Le dessin ci-dessus est incomplet}

Très souvent les dessins sont abandonnés au profit de calculs itérés. Le début du dessin a permis à l'enfant de se forger une représentation convenable du problème et d'en tirer a) un mode de résolution et surtout b) un test d'arrêt.

Exemple d'énoncé

> *Julie veut habiller sa poupée tous les jours différemment. Elle dispose de 4 hauts -des tee-shirts R, N, B et V- et de 3 bas -Jupe, Short, Pantalon. Pendant combien de jour peut-elle habiller sa poupée ?*

	TS R	**TS N**	**TS B**	**TS V**
Jupe	Lun 1	Mar 2	Mer 3	Jeu 4
Short	Ven 5	Sam 6	Dim 7	Lun 8
Pant.	Mar 9	Mer 10	Jeu 11	Ven 12

L'enfant dresse tous les possibles, de façon organisée. Le modèle n'est pas encore reconnu.

Schéma fonctionnel

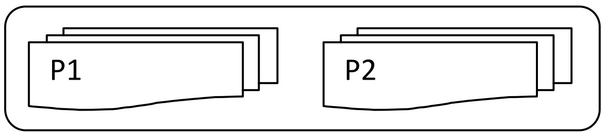
Représentations iconiques.

Particulièrement dans le champ additif. Toujours à l'instigation de l'enseignant(e). Durée de vie très brève ! Car servent de base à l'installation de représentations symboliques non analogiques, plus abstraites.

Quelques exemples proposés par A. Descaves.

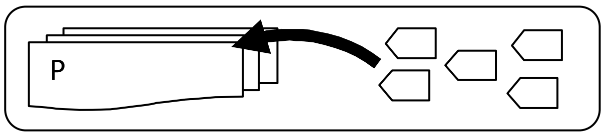
Relations entre deux touts

Il y 25 voitures dans le parking P1 et 23 voitures dans le parking P2.



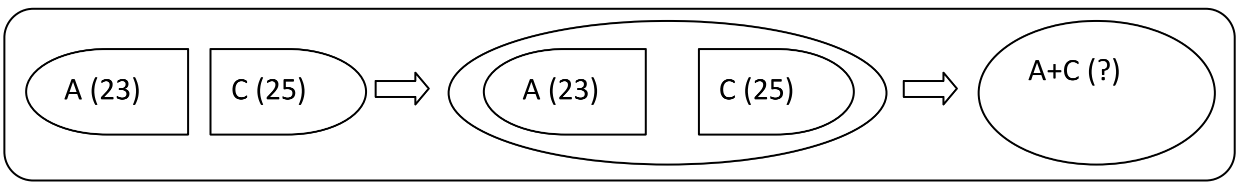
Des éléments viennent rejoindre un tout

Sur un parking, il y a 23 voitures. 5 Voitures viennent se garer.



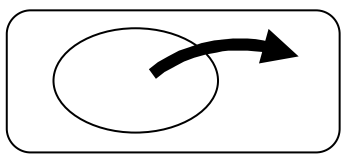
On réunit deux touts

Amélie a 23 billes et Christophe 25. Ils décident de faire pot commun.



Enlever

Sur une table il y a 19 feuilles. Puis vient un coup de vent. 3 feuilles s'envolent.



Représentations symboliques

Les représentations iconiques peuvent être le support de mime (genre greli grelo) mais elles ne peuvent s'installer durablement car elles bloquent la constitution de représentations mentales stables et efficaces. Elles ne peuvent servir (dixit A. D.) que de tremplin vers des représentations symboliques comme celles proposées par Vergnaud.

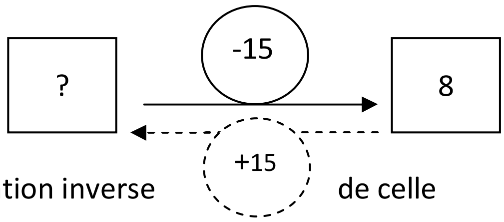
Alors que pour Vergnaud les représentations symboliques étaient un moyen de visualiser les éléments d'une typologie, Descaves propose d'installer ces représentations en classe à l'appui de la résolution de problèmes. On tiendrait ainsi une lecture décodante de l'énoncé qui aboutirait à un protocole de résolution lorsque le shéma ad hoc serait produit.

Rappel du code pour les problèmes additifs

Un carré représente un état (initial ou final) ou une mesure. Un rond représente la valeur d'une transformation lors d'un changement d'état.

Exemple

Jean paye 15 euros chez l'épicier. Il lui reste alors 8 euros. Combien avait-il dans son porte-monnaie avant de se rendre chez l'épicier ?



La flèche et le cercle en pointillés indique la transformation inverse de celle évoquée par l'énoncé et offre aussi l'opération à effectuer.

Vers l'algébrisation (écrits algébrisés)

Descaves croit possible de (faire) repérer par une lettre le nombre à chercher. Il ne s'agit pas encore d'une variable mais d'un *petit nom* pour ce que l'on cherche. On utilise bien de tels procédés pour les formulaires d'aires ou de périmètres. Dans la figure ci-dessus, le point d'interrogation est remplacé par la lettre x et la simple lecture du diagramme double offre d'emblée les écrits mathématiques : $x - 15 = 8$ et $8 + 15 = x$.

Les programmes 2008 ne semblent pas avoir suivi ces préconisations.

{Je ne reprends pas les propositions de A. D. pour le champ multiplicatif.}

Écrit programmatique

Il s'agit d'un décantage du texte avec prise d'indices sur :

- Ce que l'on sait
- Ce que l'on peut déduire facilement
- Ce que l'on cherche
- Ce qu'il faudrait savoir pour le trouver.

On produit donc un écrit qui doit déboucher sur un protocole de résolution.

On distingue habituellement les démarches par **chainage avant** : on tire des conséquences des données, puis des conséquences de ces conséquences … et les démarches par **chainage arrière** : on repère le but à atteindre puis on liste les méthodes possibles pour atteindre ce but en fonction des données. On est parfois amené à dégager des sous-buts.

Le chainage avant n'est pas toujours efficace car il ne prend pas en compte le but visé. A la limite il propage l'idée fausse mais bien présente chez nombre d'enfants qu'un problème consiste à produire un résultat numérique avec une opération portant sur les nombres fournis. Le chainage avant apparaît très souvent dans les travaux d'élèves sous forme de dessin et schémas.

Le chainage arrière est difficile car il faut accepter de bâtir dans un premier temps sur ce qu'on ne connaît pas.

Exemple

> *On dispose de 44 aimants. Avec 4 aimants on accroche 1 petite feuille jaune au tableau. Avec 6 aimants on accroche une grande feuille blanche au tableau. Si on accroche une feuille blanche au tableau, alors on peut accrocher 1 ou 2 feuilles jaunes au tableau mais pas plus. Quel est le nombre maximal de feuilles que l'on peut accrocher au tableau ?*

Résolution par chainage avant

On produit des listes de multiples par exemple sous la forme d'un tableau :

nb feuilles blanches	1	2	3	4	5	6	7
aimants que des feuilles blanches	6	12	18	24	30	36	42
nb feuilles (1 f bl + 1 f j)	2	4	6	8			
aimants 1 blanche 1 jaune	10	20	30	40			
nb feuilles (1 f bl + 2 f j)	3	6	9				
aimants 1 blanche 2 jaune	14	28	42				

On repère qu'avec 42 aimants ou peut accrocher 3 feuilles blanches et 6 jaunes, soit 9 en tout et il reste 2 aimants inutilisés. On peut choisir d'accrocher 4 feuilles blanches et 4 jaunes avec 40 aimants, mais il reste 4 aimants qui permettront d'accrocher une $5^{\text{ième}}$ feuille jaune et donc au total 9 feuilles.

Résolution par chainage arrière

On commence par diviser le problème en trois sous-problèmes. On tient donc 3 sous-buts :

- sous-but 1 : accrocher le maximum de feuilles blanches
- sous-but 2 : accrocher le maximum de couples (1 blanche 1 jaune)
- sous-but 3 : accrocher le maximum de triples (1 blanche 2 jaunes)

La réalisation de chaque sous-but passe par une division de 44 par respectivement 6, 10, 14 avec observation du reste pour optimisation finale.

Organigramme

Petit extrait de A. Descaves (In Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes - Hachette 1995-2001)

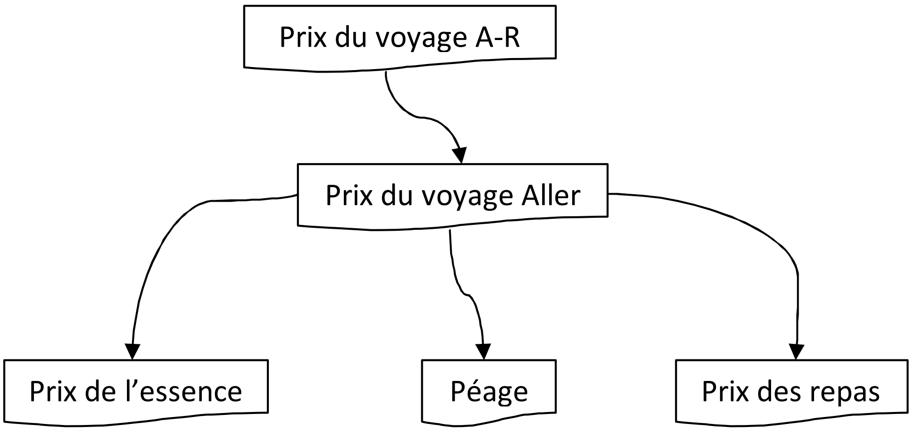
> Les stratégies d'apprentissage consistent à permettre la constitution chez les élèves de schémas de résolution ; à développer leur capacité à articuler démarche ascendante (mise en relation des données) et démarche descendante (actualisation de schémas).
>
> Résoudre un problème à plusieurs opérations nécessite soit la décomposition d'un but en sous-buts, soit d'articuler des sous-buts pour atteindre le but, et souvent la combinaison de ces deux stratégies.
>
> **En général, la difficulté consiste à recoller but et sous-buts. Pour cela, il faut disposer d'un bon système de représentation.**
>
> Plusieurs systèmes sont possibles. Nous les étudions succinctement à partir du problème intitulé Les vacances des Dupommier […].
>
> Il s'agit donc de transformer, sous la forme d'un organigramme, les différents éléments constitutifs d'un discours établi, tout d'abord en langue naturelle, puis en écrit mathématique.

Enoncé du problème Dupommier

> Monsieur et Madame Dupommier, Mélanie et Christophe, leurs enfants de 12 et 14 ans, doivent aller à Chamonix, aux sports d'hiver.
>
> Ils veulent savoir à combien leur reviendra le voyage aller et retour en voiture.
>
> De Paris, où ils habitent, à Chamonix, il y a environ 600 kilomètres et leur voiture consomme 7 litres d'essence pour faire 100 kilomètres. Il faut bien compter 56 € de péage et 6 € par personne pour déjeuner sur l'autoroute à l'aller et autant pour le retour. L'essence coûte 2,15 € le litre.
>
> […] Adapté de Objectif Calcul CM 1 1995 chez Hatier].

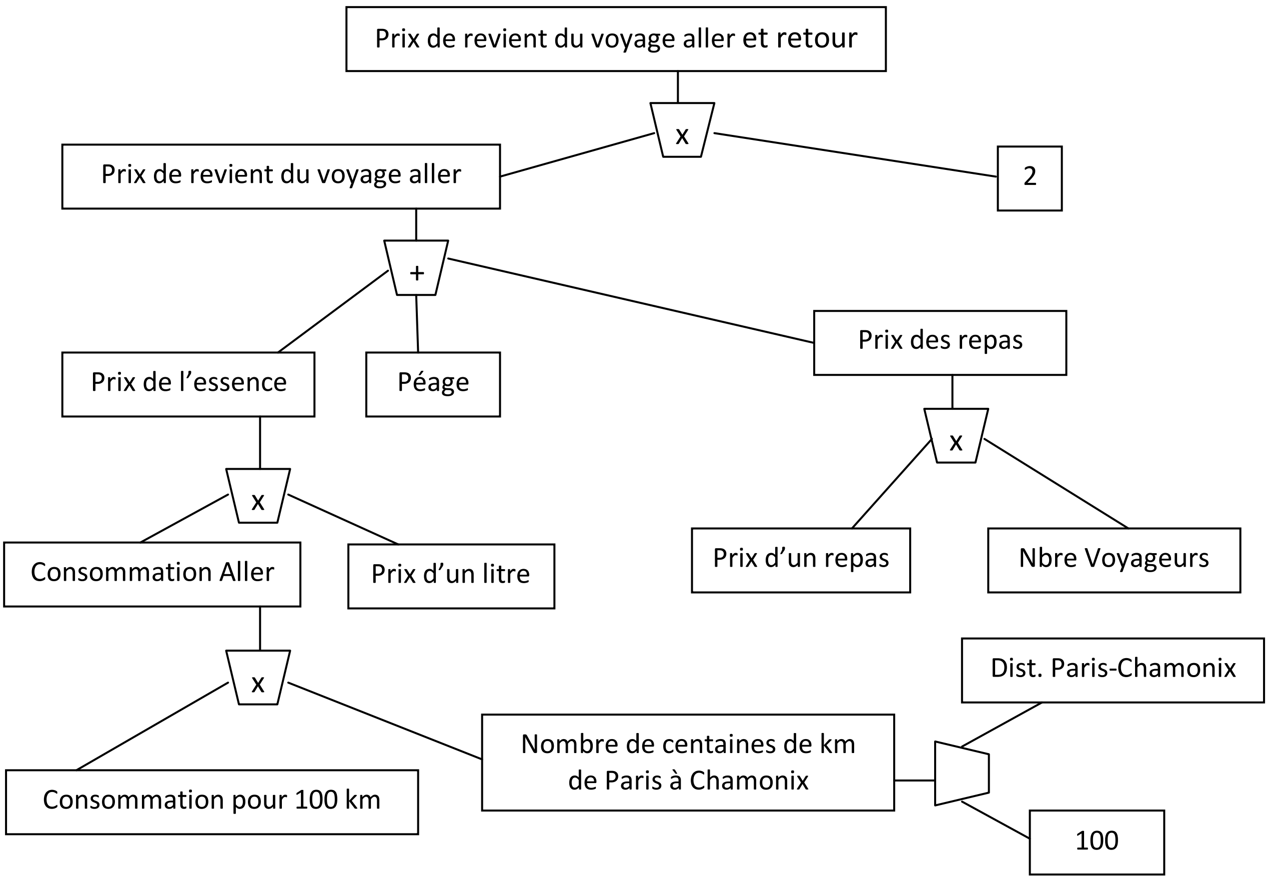
Lecture attentive du texte et production d'un organigramme

Chainage arrière ⇔ décomposition du but aux sous-buts



Puis recollement des sous-buts, après calculs intermédiaires, en remontant l'organigramme.

Production d'un organigramme en vue d'un écrit mathématique modélisant le problème



Il ne reste plus qu'à relever les feuilles terminales et à remonter l'arbre en tenant compte des jonctions. On obtient quelque chose comme : {[(600 : 100) x 7 x 2,15] + 56 + 6 x 4} x 2

A. Descaves est le premier a repérer que cette démarche est difficile à mener par des élèves de CM. La figure n'est pas sans rappeler les organigrammes produits en programmation informatique par des analyses descendantes. On sait que l'on n'a jamais su installer à l'école primaire de telles démarches.

A. Descaves se contente donc de signaler que la lecture de la figure reste accessible en compréhension. Dire ceci, c'est indiquer un mode particulier d'ostension progressive, par exemple à l'occasion d'une correction magistrale d'un problème à mesure complexe.

Une variante mixte l'écrit programmatique et l'algébrisation.

On crée des *boites* successives qui sont connectées et approfondies au fur et à mesure.

A l'étape 1 :

$$\boxed{\text{Dépense finale}} = 2 \text{ x } \left(\boxed{\text{Essence}} + \boxed{\text{Péage}} + \boxed{\text{Repas}} \right)$$

A l'étape 2 : soit on remplace une des étiquètes posées à droite par une autre série d'étiquètes qui font sens, soit on crée une deuxième ligne d'identification. Cette deuxième procédure est plus facile à mettre en œuvre.

On tient là une manière dynamique d'exposer un écrit programmatique, à conditions d'avoir préparé ses étiquètes prêtes à punaiser au tableau.

Une variante consiste à convier les élèves à ces affichages successifs. On présente dans le désordre au tableau les diverses étiquètes de l'étape 1 ; on invite les élèves à réfléchir sur un ordonnancement intelligible et qui traduise -en quelque sorte- correctement l'énoncé ; on invite un élève au tableau.

On tient là un biais pédagogique pour ausculter un énoncé de problème à modèle complexe.

Cette démarche, assez lourde, à réserver vraisemblablement aux CM, n'est pas pour autant la panacée.

A. Descaves pense pouvoir transformer ce jeu sur les étiquètes en un jeu d'écritures pur. Sauf erreur de ma part, il n'a pas été suivi par les autres didacticiens connus.

Représentation mentale d'un problème

C'est sans doute un jeu complexe entre la MCT, la MMT et la MLT, autour d'un énoncé donné. Les représentations proposées ci-dessus sont sans doute des aides à la fabrication d'une R. M. P. mais celle-ci ne se résume certainement pas à l'une d'entre elles.

---

db à vdb 2010

Test des idées développées dans :

PNX7 PNX8

(Voir aussi papier sur les représentations)

Problèmes donnés dans une classe de CE 2

Énoncé n°1

Une salle de cinéma comporte 29 rangées de 25 fauteuils chacune.

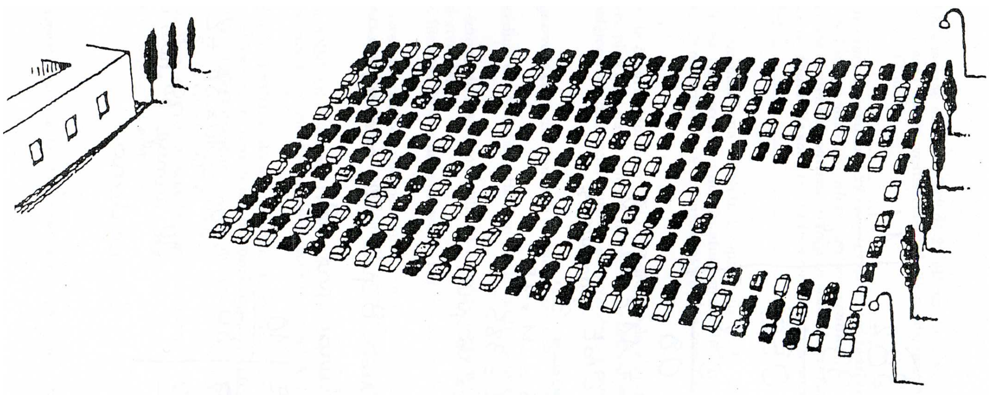
A la séance de l'après-midi, 705 places ont été vendues.

1/ Combien de fauteuils contient en tout la salle de cinéma ?

2/ Combien de fauteuils sont restés inoccupés à la séance de l'après-midi ?

Énoncé n°2

Voici une photo d'un parking de supermarché. Le parking est presque plein, il ne reste pas beaucoup de places libres. Quel est le nombre de voitures sur ce parking ?



Consignes :

Comparer les deux énoncés. Lequel sera plus facile à traiter a priori ?

L'algorithme méthodologique de PNX 7 est-il bien adapté à chacun des deux énoncés ?

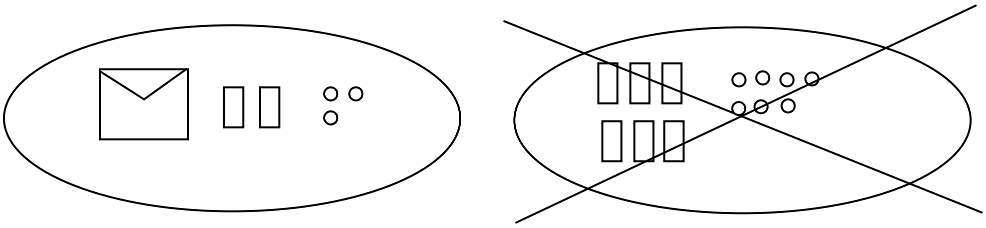
Construire les diagrammes comme avancé dans PNX 8.

Le modèle algébrique est $S = a \times b \pm c \times d \pm e$. Comprendre par $\pm$ soit le signe + soit le signe -. Ce modèle est-il apparent ici ? Les enfants pourraient-ils algébriser le problème dans cette direction (au besoin dans une classe plus élevée). Proposer un autre énoncé sur ce modèle.

Document 5

Propositions de schémas susceptibles d'aider les élèves

Schéma permettant des procédures de comptage :



Billes qui restent à la fin — Billes perdues

Schéma pour faire comprendre l'histoire :

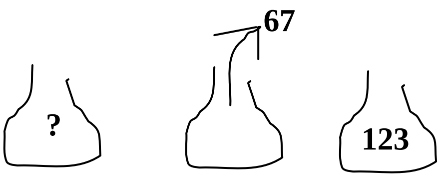


Schéma pour essayer de faire comprendre qu'il faut faire une addition (avec axe chronologique) :

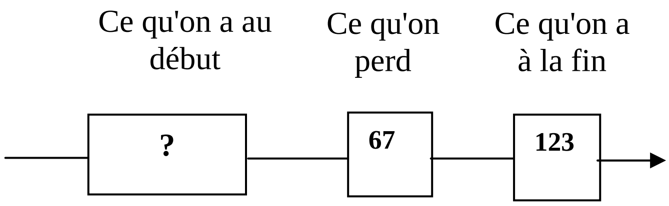


Schéma pour essayer de faire comprendre qu'il faut faire une addition (avec axe numérique) :