Résoudre des problèmes de proportionnalité au CM2

Analyse a priori

La proportionnalité est une extension du champ multiplicatif.

En effet dans celui-ci, les élèves ont déjà rencontré des problèmes de proportion simple entre deux grandeurs : Revoir la classification Vergnaud ;

Dans ces problèmes, on dispose de la donnée de 3 valeurs et on en cherche une quatrième "en proportion". On distingue deux cas :

¤ cas 1/ l'une des valeurs est l'unité (ou l'on peut s'y ramener) et on repère alors soit les situations de multiplication soit les situations de division (quotition ou partition) ;

¤ cas 2/ le retour à l'unité est impossible ; on constate alors fréquemment l'appel par les élèves aux procédures scalaires (qui font jouer les propriétés de linéarité) plutôt que celui des procédures fonctionnelles, sauf quand le coefficient de proportionnalité est facile à trouver (est d'évidence).

Il n'y a problème de proportionnalité que lorsque la table (implicite ou explicite) des données est plus grande que 2x2. C'est facilement le cas lorsque la proportionnalité apparaît dans le cadre géométrique avec l'agrandissement ou la réduction de figures.

Le mot-clef du sujet reste le mot proportionnalité. On doit considérer que la proportionnalité a déjà été travaillée dans les classes antérieures. Le thème est simplement élargi aux notions dérivées (vitesse, échelle, pourcentage) pour permettre aux élèves de résoudre des problèmes divers plus ou moins inspirés de la vie courante selon les derniers textes officiels. Il ne faut donc pas s'égarer vers une problématique de la résolution de problème.

Éléments théoriques

Dans le cadre numérique :

Notion de suites proportionnelles, tableaux de proportionnalité.

Propriétés des suites proportionnelles : linéarité additive, multiplicative

Notion de coefficient de proportionnalité ; application : règle de trois ; produit en croix.

Dans le cadre graphique :

Représentation graphique ; notion de pente ; propriété des écarts.

Fonction affine et fonction linéaire.

Dans le cadre géométrique :

Agrandissement/réduction de figure. Expression de la linéarité : les milieux restent des milieux, etc.

Centre et coefficient d'homothétie.

Applications usuelles (on liste ici, on ne développe pas) :

Pourcentages

Échelles

Vitesse moyenne.

Dans les textes officiels :

4 - Organisation et gestion de données […]

La proportionnalité est abordée à partir des situations faisant intervenir les notions de pourcentage, d'échelle, de conversion, d'agrandissement ou de réduction de figures. Pour cela, plusieurs procédures (en particulier celle dite de la "règle de trois") sont utilisées.

Dans le socle commun (2ième palier) :

L'élève est capable de :

[…]

- résoudre des problèmes relevant des quatre opérations, de la proportionnalité, et faisant intervenir différents objets mathématiques : nombres, mesures, "règle de trois", figures géométriques, schémas ;
- savoir organiser des informations numériques ou géométriques, justifier et apprécier la vraisemblance d'un résultat ;
- lire, interpréter et construire quelques représentations simples : tableaux, graphiques.

Dans les progressions pour le CM 2 :

La résolution de problèmes joue un rôle essentiel dans l'activité mathématique. Elle est présente dans tous les domaines et s'exerce à tous les stades des apprentissages.

Section Nombre et calculs :

Problèmes : - Résoudre des problèmes de plus en plus complexes.{Au CM 1 : Résoudre des problèmes engageant une démarche à une ou plusieurs étapes.}

Section Organisation et gestion de données :

- Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité et notamment des problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux conversions d'unité, en utilisant des procédures variées (dont la "règle de trois"). {Au CM 1 : Utiliser un tableau ou la "règle de trois" dans des situations très simples de proportionnalité.}

Pour l'exposé à l'oral du CRPE

¤ Bien entendu, rappel des textes officiels puis exposé théorique.

¤ Dans un deuxième temps, on expose rapidement un séquençage pour le CM 2. Cf. infra.

¤ Prévoir de développer la séance concernant la règle de trois, puis une ou deux séances, par exemple celle sur la notion de vitesse et celle sur les échelles.

¤ On peut se livrer à évaluation sommative : il suffira de piocher dans une banque de problèmes en fin de manuel.

Séquençage

{S'inspire fortement du livre EuroMaths CM2}. Les situations de proportionnalité dans le cadre géométrique ne sont pas évoquées ici.

s_1 : Relations entre les grandeurs : proportionnalité ?

=> repérer qu'une situation est une situation de proportionnalité ou non grâce à de bons indices.

s_2 : Proportionnalité dans la vie quotidienne

Augmenter le catalogue de *bonnes formes* pour le concept de la proportionnalité. On propose aux élèves des contextes familiers (enfin, considérés comme tel …).

s_3 : Comparaison relative entre grandeurs : proportionnalité outil.

La proportionnalité devient ici un outil pour résoudre des problèmes de comparaison relative entre grandeurs ; en clair comparer des mélanges, indépendamment des quantités mises en jeu.

Cette leçon débouchera sur (ou prendra tout son sens avec) les pourcentages.

s_4 : Calculer des moyennes : vitesses, distances, variations de prix, comparaisons d'effectifs

Le mot clef ici est "moyenne". Cette notion n'est pas inconnue des élèves, puisqu'elle est utilisée de façon plus ou moins implicite dans divers contexte. Il s'agit ici d'en construire le sens mathématique dans des contextes particuliers. En effet la notion de moyenne est un objet théorique qui cherche à remplacer la réalité irrégulière par un modèle qui, lui, est régulier. Et la régularité renvoie à la proportionnalité : à vitesse constante, le kilométrage parcouru est proportionnel au temps, à coût moyen constant du kilomètre parcouru, le prix du voyage est proportionnel à sa longueur, etc.

Entre dans cette notion celle de l'effectif moyen, prélude aux statistiques.

s_5 : Relations entre des grandeurs : proportionnalité.

Il s'agit d'un temps de pose qui prolonge s_1. On peut parler de sédimentation des connaissances acquises récemment : on attend des élèves, dans divers contextes peu ou prou familiers, la mise en œuvre de procédures relativement expertes. Exemples : recette de la pate à crêpe, soluté et solvant.

Cette leçon peut permettre de basculer dans le cadre graphique voire géométrique (ex de l'araignée pour la pate à crêpe). Elle peut aussi permettre de faire le point (évaluation formative).

s_6 : Proportionnalité : la règle de 3.

C'est la petite nouveauté des programmes 2008. Donc doigt sur la couture …

La règle de trois est implicite chaque fois qu'un retour à l'unité est possible. Dans ce cas, une procédure fonctionnelle -donc globale- prend le pas sur d'autres procédures plus locales, car scalaires. Le principe de la règle de 3 vise à faire comme si un retour à l'unité était possible.

Les didacticiens avaient refusé de traiter explicitement cette notion en classe, gérant au cas par cas.

Avec l'injonction des nouveaux programmes, il n'est plus possible de s'en détourner.

Le grand danger de la règle de trois est qu'il s'agit d'une démarche purement algébrique, valide si on accepte de découpler sémantiquement pendant une phase du travail. Exemple : Si 8 mètres de ruban coutent 30 euros, je ne peux pas calculer le prix unitaire. Pour autant, grâce à la règle de trois, je peux énoncer que 20 mètres de ruban

couteront (30/8)*20 = 75 euros.
La parade de nombre de manuels a consisté à proposer des situations i) que l'élève peut traiter au plus près du sens sans appel à la règle ii) avec appel à la règle, sachant que les résultats tombent juste ! La règle de trois est donc assimilée comme un raccourci efficace et juste.

$\boxed{\text{s\_7}}$: <u>Les pourcentages</u>.

Cette leçon est évidemment un prolongement de $\boxed{\text{s\_3}}$. Il s'agit de forger des outils de comparaison de données diverses, *toutes choses étant égales par ailleurs*. Penser aux élections ou aux soldes. Les pourcentages facilitent de nombreuses comparaisons et c'est sans doute pour cela qu'on l'y fait si souvent appel dans la vie quotidienne (parfois aussi pour de mauvaises raisons).
Le CM2 permet une première familiarisation avec la notion. Le travail sera poursuivi au collège.
La conquête de cette notion suppose :

i) l'aptitude à transcoder rapidement (passer de 85% à 0,85)

j)la maîtrise des décimaux jusqu'à [illegible]2

k) la capacité à mobiliser des procédures fonctionnelles plutôt que scalaires (test redoutable de la recherche du prix HT quand on connaît le prix TTC !).

$\boxed{\text{s\_8}}$: <u>Les échelles</u>

Les situations de proportionnalité trouvent là tout naturellement un nouveau contexte important dans les pratiques sociales : le travail sur les échelles est lié à tout ce qui est du domaine de la représentation, du schéma, du croquis, du plan, des cartes dès lors qu’il faut conserver le contrôle des mesures de longueur. Le travail sur les échelles permet aussi de faire prendre conscience que les marges d’erreurs (inévitables dans tout travail de mesurage sur un plan) entraînent des marges d’erreurs pour les distances réelles, erreurs qu’il convient de quantifier.
Le travail peut se diviser en deux sections :

<u>Section 1</u> : réduction, agrandissement

<u>Section 2</u> : plans et cartes

Le travail sur les échelles fait toujours s'affronter 2 espaces : le macro-espace de la représentation ou de la maquette et, soit le méso-espace (reproduction de véhicules par exemple), soit le méga-espace (lectures de plan, investigations en astronomie). L'exception, confirmant comme il se doit la règle, concerne les échelles microscopiques qui -au niveau de la notation (x 20 000 par exemple) vient battre la notation habituelle (1/250 000).
Il est évident que le travail sur les échelles supposent la mise en œuvre à peu près systématique de procédures fonctionnelles, la maîtrise du système d'unités légales, la compréhension de la notion de distance lorsque l'on travaille sur les cartes.