Thème O12-4 : Construire la hauteur d'un triangle au CM 2.

Liens internet

Site Educlic : https://www.educlic.fr/fiche_de_preparation-sequence/340/Les-triangles {Identification obligatoire}. [La séance casse pas trois pattes à 1 canard.]

www.capmaths-hatier.com/CapmathsGeom**CM2**programme2008.pdf
Un PDF de 11 pages au format PDF dont 4 sont consacrées à ce thème.

http://cmonie.pagesperso-orange.fr/maths/soutien/5eme/tr7-hauteurs.PDF
{Principalement pour rappeler que cette notion est amplement traitée au collège.}

Analyse à priori

¤ **Le vocable hauteur recouvre deux acceptions**.

1/ Droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé du triangle ;
On appelle pied de la hauteur le point d'intersection de cette hauteur avec le coté qui l'a définie.

2/ Distance du sommet au côté opposé qui sera utile pour le calcul de l'aire d'un triangle.
Dit autrement, il s'agit donc de la longueur du segment joignant un sommet et le pied de la hauteur issue de ce sommet. **La notion de distance d'un point à une droite est impliquée ici**.

¤ **Rappels de géométrie** :

1- **Dans tout triangle, chaque couple {sommet, coté opposé} permet de définir une hauteur**.

2- Quand le triangle est rectangle, deux des trois hauteurs se confondent avec des cotés du triangle.

3- Les hauteurs sont concourantes en un point appelé orthocentre (et qui, n'est centre de rien du tout). {Il n'est pas difficile de montrer ce fait en construisant les parallèles à chaque coté, passant par le sommet opposé ; apparait un triangle tel que les hauteurs d'origine ne sont rien que les médiatrices de ses cotés ; la conclusion tombe de suite.}

4- On peut démontrer que les symétriques de l'orthocentre par rapport aux cotés du triangle, comme ses symétriques par rapport aux milieux des cotés, appartiennent au cercle circonscrit.

5- L'orthocentre, le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit sont alignés (droite d'Euler).

6- Les pieds des hauteurs, les milieux des cotés, les milieux des segments joignant l'orthocentre aux 3 sommets sont cocycliques (cercle d'Euler).

7- Selon la nature du triangle étudié, une hauteur peut se confondre avec une médiane, ou une bissectrice, ou une médiatrice. {En fait, dès que l'on a une confusion, on a aussi les autres, et le triangle est isocèle, voire plus).

¤ **Rappels sur la problématique de la mesure** :

1- Si on prend le vocable dans sa seconde acception, c'est parce que cela nous permet de calculer l'aire du triangle selon la formule bien connue Aire = base x hauteur / 2.

2- Noter que si l'on connait les mesures des trois cotés et celle d'une des hauteurs, alors on tient celle des deux autres hauteurs.

3- On sait se passer de l'appel à la hauteur pour calculer une aire de triangle depuis le premier siècle après JC, grâce à la formule de Héron.

¤ **Retour à l'intitulé du sujet** :

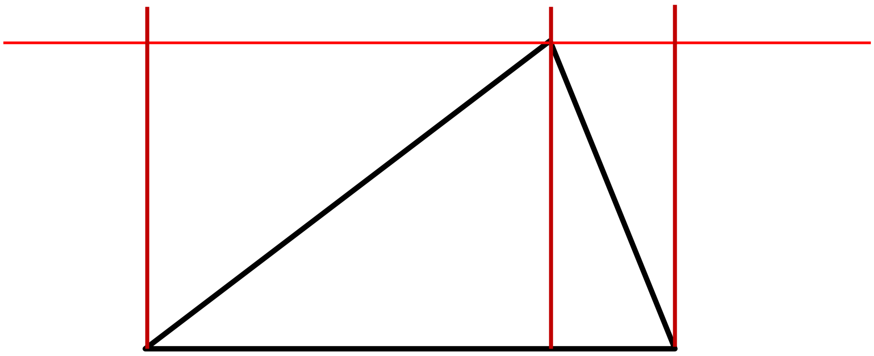
1- Il est évident que les éléments de géométrie évoqués ci-dessus –à partir du point 3- n'ont pas leur place à l'école primaire, de même que les points 2 et 3 concernant la problématique de la mesure.

2- Il est certes possible d'introduire la notion de hauteur d'un point de vue géométrique, mais ce ne n'est pas dans l'esprit des programmes qui mettent en avant la rencontre avec les formules de calcul de l'aire de quelques surfaces planes.

On peut donc mieux cerner l'enjeu du sujet :

1- Si l'on défend l'idée que l'aire des polygones est calculable grâce à une formule, alors pourquoi pas introduire la formule relative à l'aire du triangle !
{**On peut discuter à l'envi cette injonction des programmes 2008**.}

2- La justification de cette formule passe par un travail de chirurgie : transformer un triangle en un rectangle. Mais l'obtention du rectangle suppose de tracer une parallèle puis deux perpendiculaires.



Bien entendu, on ne travaille que dans le cas où le pied de la hauteur appartient au segment.

3- On tiendrait donc un double mouvement !
Mouvement 1 : i) tout triangle rectangle peut être doublé en un rectangle
ii) tout triangle peut être décomposé en deux triangles rectangles, et donc pourra être doublé en un rectangle.
Mouvement 2 : c'est la hauteur qui permet ce doublement. Dès que l'on sait tracer une hauteur, on peut évaluer ou mesurer sa longueur et donc calculer l'aire du triangle.

Dans les programmes

¤ **Dans le paragraphe 2 –Géométrie du chapitre relatif au cycle 3**

Les relations et propriétés géométriques : alignement, perpendicularité, parallélisme, égalité de longueurs, symétrie axiale, milieu d'un segment.
L'utilisation d'instruments et de techniques : règle, équerre, compas, calque, papier quadrillé, papier pointé, pliage.

¤ **Dans le paragraphe 3 - Grandeurs et mesures du même chapitre** :

Les longueurs […] : mesure, estimation, unités légales du système métrique, calcul sur les grandeurs, conversions, périmètre d'un polygone, formule du périmètre du carré et du rectangle,[…]
Les aires : comparaison de surfaces selon leurs aires, unités usuelles, conversions ; formule de l'aire d'un rectangle et d'un triangle.

¤ **Dans le socle commun (fin de CM2)** :

- utiliser les unités de mesure usuelles ; utiliser des instruments de mesure ; effectuer des conversions

¤ **Dans les progressions :**

Chapitre Géométrie, colonne CM2 :

Dans le plan :

- Utiliser les instruments pour vérifier le parallélisme de deux droites (règle et équerre) et pour tracer des droites parallèles. {Note :Rien sur la perpendicularité !}
- Vérifier la nature d'une figure en ayant recours aux instruments.
- Construire une hauteur d'un triangle.

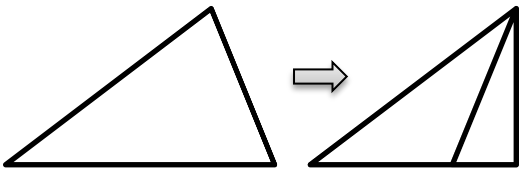
Quelques activités

Remarque : on ne peut pas se contenter de traiter le thème de façon restrictive, car ce qui est en jeu, c'est moins le tracé de la hauteur que la définition –ici fonctionnelle- de celle-ci.

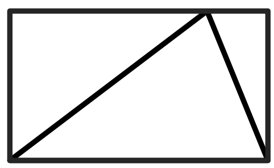
1) Conquête du double du triangle

a) travail avec un triangle rectangle
¤ façon puzzle (2 identiques sont manipulés pour reconstruire le rectangle)
¤ par retour au quadrillage
¤ par tracé sur papier libre à l'aide des instruments.

b) travail avec un triangle (presque) quelconque : le pied de la hauteur visée appartient au coté.
On commence par faire prendre conscience que le triangle peut être découpé en deux triangles rectangles …
¤ par pliage



¤ par commande :"Voici un triangle. Tu peux le découper pour obtenir deux triangles rectangles."
Puis on fait prendre conscience qu'un triangle (presque) quelconque peut être doublé en un rectangle …
¤ par duplicata puis découpage de l'un deux –stratégie de puzzle ;
¤ par observation (puis analyse) d'une figure distribuée



¤ par retour sur le quadrillage.

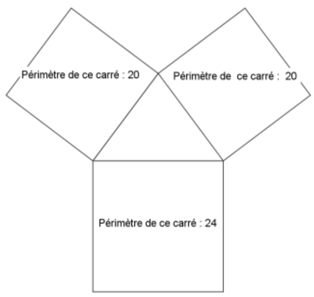
Note : la notion de distance d'un point à une droite, même implicite, n'est pas abordée ici. C'est peut-être une lacune.

2) Mise en place de la formule

a) Synthèse et institutionnalisation (tracé et formule).
b) Étayage : exercices divers avec conversions éventuelles.
c) Résolution de petites énigmes :
i) la figure est donnée, deux des trois données sont connues, on demande la troisième ;
ii) la figure doit être construite ou complétée, deux des trois données …

3) Expansion

Calculs d'aires de figures plus complexes comme dans :



Recontextualisation dans le cadre de la proportionnalité (échelle, etc.)
Extension à la figure du trapèze ?
Résolution d'un problème (lemme d'Euclide déguisé) :
"Le triangle ABC vérifie : BC mesure 6 cm, son aire vaut 24 cm2. Où se trouve le point A ?"