Fractions simples et fractions décimales (encadrement, somme, partie entière) au CM (le candidat choisira le niveau : CM 1 ou CM 2)

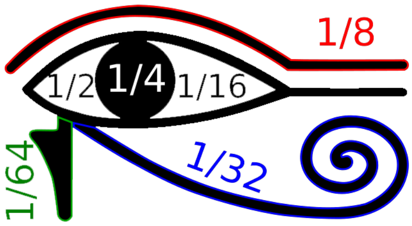
Cette leçon rappelle celle intitulée " Les décimaux au CM1". Mais l'intitulé est suffisamment différent pour alerter le candidat : le sujet porte sur des fractions, notamment décimales, et pas des écritures décimales. Le candidat doit fixer le niveau de traitement ; est-ce innocent ?

Analyse sémantique

Fraction simple … : réfère à des dispositifs couramment utilisé dans la vie courante, la demi-livre, le demi-litre, le quart de beure, le tiers de la longueur. Les fractions sont-elles toujours simples ? Qu'est-ce qu'une fraction compliquée ? un fraction (tout court) ?

… et fraction décimale : une fraction décimale est-elle une fraction simple, une fraction un peu moins simple mais pas trop compliquée ?

Le titre fait penser à la pratique égyptienne des fractions (l'œil d'Horus) dont toutes avaient 1 comme numérateur et dont les dénominateurs étaient des puissances de 2. De telles fractions sont-elles représentatives du concept ?



Dans les programmes

1 - Nombres et calcul

Les nombres décimaux et les fractions :

- fractions simples et décimales : écriture, encadrement entre deux nombres entiers consécutifs, écriture comme somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1, somme de deux fractions décimales ou de deux fractions de même dénominateur ;
- nombres décimaux : désignations orales et écritures chiffrées, valeur des chiffres en fonction de leur position, passage de l'écriture à virgule à une écriture fractionnaire et inversement, comparaison et rangement, repérage sur une droite graduée ; valeur approchée d'un décimal à l'unité près, au dixième près, au centième près.

Au niveau des progressions

Fractions :

Au CM1:

1/ Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième.

2/ Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.

Au CM2 :

1/ Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs.

2/ Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

3/ Ajouter […] deux fractions simples de même dénominateur.

Décimaux :

Au CM1:

1/ Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/100ème).

2/ Savoir : les repérer, les placer sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer par deux nombres entiers consécutifs, passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement.

Au CM2 :

1/ Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/10 000ème).

2/ Savoir : . les repérer, les placer sur une droite graduée en conséquence, les comparer, les ranger, produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant 10 ; 100 ; 1 000... et 0,1 ; 0,01 ; 0,001... ; Donner une valeur approchée à l'unité près, au dixième ou au centième près.

A ces items, on doit ajouter la liste des compétences attendues au niveau du calcul :

Au CM1:

Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000.
Addition et soustraction de deux nombres décimaux.
Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier.
Division décimale de deux entiers.

Au CM2 :

Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers et décimaux.
Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000.
Addition, soustraction, multiplication de deux nombres entiers ou décimaux.
Division d'un nombre décimal par un nombre entier.

Préparer la trame de l'exposé

Les programmes 2008 semblent proposer d'aborder les fractions avant les décimaux. Deux interprétations sont possibles :

1/ La notion de fraction est un préalable à la définition des décimaux ;

2/ Il faut installer l'idée de nouveaux nombres et les fractions -usuelles, *forcément usuelles*, le permet.

Il est important de noter que le développement de la notion reste encore embryonnaire, contrairement aux décimaux dont une relative maîtrise -au moins sur le plan du calcul- est escompté. La philosophie du practico-pratique aurait-il encore frappé ?

Il me semble fondamental ici de sécuriser l'approche théorique, notamment mathématique, surtout quand on anticipe sur la composition des jurys.

Il me semble tout aussi fondamental de limiter son sujet, en éliminant du traitement ce qui a trait à l'introduction de l'écriture virgulaire (contrairement à l'autre sujet) et évidemment aux attentes du programme non citées dans le sujet.

Éléments théoriques

Retour sur la notion de fraction :

1/ Les entiers ne permettent pas de toujours de traiter certains problèmes : diviser une quantité en un certain nombre de parts, répartir des poteaux de façon régulière sur une longueur donnée.

Si on modélise légèrement, on distingue deux figures :

i) on veut pouvoir distribuer une quantité x b fois de telle sorte qu'au final on ait distribué la quantité a, b et a étant des nombres entiers ; on considérera comme cas simples ceux où b est un nombre-chiffre sympathique (2, 4, 8, peut-être 3 ou 5, sans doute 10).

ii) on veut pouvoir marquer une position x dans l'intervalle [0, a] (a entier supérieur à 2) de telle sorte qu'en reportant la distance de 0 à cette position b fois (b entier supérieur à 2) on tombe pile sur a. Cette seconde situation est beaucoup plus facile à mettre en œuvre dans les cas b=2 ou b=4, grâce à la notion de moitié d'un segment.

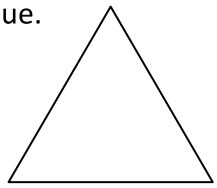
2/ Définition formelle :

j) on construit la notion de fraction, comme solution de l'équation ax=b, et on forge l'écriture a/b. Cette dernière s'applique directement à la figure du fractionnement d'une longueur comme présenté en ii) ci-dessus.

jj) on pointe la notion de fractions équivalentes du type (ka)/(kb), en notant que les équations kax=kb (k variable non nul) sont toutes équivalentes. Les concrétisations de ce point demande un peu de soin, mais restent faciles dans le cas de modélisation de type ii).

jjj) On en déduit la notion de nombre rationnel.

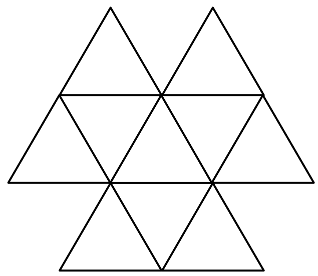
→ Il est important de noter que la représentation d'un rationnel n'est pas unique.



→ La construction des rationnels n'est pas abordée au cycle 3, on approche la notion d'écritures équivalentes (2/3 = 10/15) ; on en vérifie la disponibilité, en situation, dans le cas des fractions à dénominateur une puissance de 2.

Stratégies d'introduction des fractions :

Selon la modélisation choisie :



k) on fait apparaître des subdivisions de surfaces, d'abord unaires, puis multiples de l'unité, avant de proposer des figures dont l'aire est une fraction d'une figure donnée.

Exemple ci-contre : quelle est l'aire de la figure ci-contre sachant que le triangle équilatéral figuré au dessus représente l'aire unité.

i) on fait apparaître (par pliage d'une bande de papier) une subdivision régulière de l'intervalle [0, 1] que l'on propage ensuite sur un empan assez long : bandes des demis, des tiers, des quarts, éventuellement des sixièmes ou des huitièmes.

Dans le premier cas, on travaille dans un contexte de surface, dans le second dans un contexte de longueur.

La seule introduction qui n'est pas acceptable !

Présenter les fractions à partir de parts de tarte ou de camembert : l'accent est mis sur le numérateur et l'élève pense la fraction comme la donnée de deux entiers séparés par une barre.

Cette définition fait écran à la compréhension des fractions dépassant l'unité (que signifie cinq tiers de tarte ?)

Elle ne facilite pas l'implantation de la somme de 2 fractions. Quant à l'introduction du produit de 2 fractions ?

Il est à ce propos important d'empêcher les élèves d'oraliser une fraction comme 3/4 en "trois sur quatre" au profit de "trois quarts" : "trois sur quatre" n'est qu'une description sans signification de l'écriture 3/4.

Le cas particulier des fractions décimales

Il n'est pas difficile de reprendre la modélisation du partage de longueurs en n parties égales, mais avec n égal à 10. On débouche rapidement sur l'écriture a/10, diverses équivalences (par exemple 120/10 = 12) et les premiers calculs.

Plus surement, on installe très rapidement les dixièmes de dixièmes, comprendre les centièmes. Il ne restera plus qu'à installer la notation virgulaire pour que la construction des décimaux soit à peu près achevée.

A-t-on affaire à de nouveaux nombres ?

L'ensemble des écritures ainsi construit peut-être considéré comme un prolongement de $\aleph$.

¤ On peut identifier toutes les écritures du type a/1 (ou qui s'y ramènent) avec l'entier a.

En pratique, c'est l'équivalence ka/k $\equiv$ a qui apparaît le plus facilement (6/3 = 2) car la présentation d'écriture du type a/1 est vraiment trop formelle.

¤ On peut facilement calculer des sommes de fractions de même dénominateur (en donnant du sens au calcul). On peut de même comparer facilement des fractions de même dénominateur, en particulier les fractions à dénominateur 10.

En résumé, les manipulations proposées aux élèves leur permettent de vérifier que les fractions utilisées servent à mémoriser de l'information, calculer des données par exemple pour partager, plus généralement anticiper des phénomènes, tout en restant compatible avec les actions déjà connues avec les nombres entiers.

La réponse à la question ci-dessus est donc positive, même si l'ensemble des nouveaux nombres reste (très) incomplet.

Vers la définition de certaines notions pour les fractions simples ou décimales

Partie entière ou fractionnaire :

En profitant de la division euclidienne, on peut toujours prendre en sandwich (principe d'intercalation) une fraction a/b par deux entiers e et (e + 1) où e est le quotient de a par b : a = be + r $\Rightarrow$ a/b = e + r/b.

Dans le cas des fractions décimales l'obtention en est immédiate !

Sur un exemple : 123/10 = (120 + 3)/10 = 120/10 + 3/10 = 12 + 3/10.

La fréquentation de cette notion par les élèves est décisive avant de leur présenter le principe de l'écriture virgulaire.

Ordre et comparaison :

Étant données deux fractions a/b et c/d, on peut toujours les mettre sous un dénominateur commun, ce qui permet de ne faire porter la comparaison que sur les numérateurs. On en déduit assez facilement le critère classique dérivé du produit en croix.

Mais la comparaison est facilitée quand les dénominateurs sont dans un rapport de multiplicité (7/4 est plus grand que 13/8) ou quand il s'agit de fractions décimales.

Assez souvent, il est possible de comparer deux fractions en s'appuyant sur leurs parties entières ou leurs successeurs entiers.

Exemple : 13/8 < 16/8 (= 2) < 2 + 1/4 = 8/4 + 1/4 = 9/4.

Dans le cas des décimaux, on tiendra un algorithme particulièrement efficace avec la venue de l'écriture virgulaire, algorithme qui viendra prolonger celui des entiers.

Définition de l'addition sur les fractions

Elle est évidente si les fractions ont même dénominateur. Sinon il faut recourir à des fractions équivalentes. Pour ajouter c/d à a/b, on commence par chercher le ppcm de d et b, soit p ; on en déduit deux fractions équivalentes c'/p et a'/p qu'il ne reste plus qu'à additionner. Cette construction n'apparaît pas à l'école primaire. Mais elle peut être, de façon ponctuelle i.e. sur des cas particuliers, rencontrée au C3.

En revanche, elle est incontournable dans le cas des fractions décimales.

Sur un seul exemple, et sans théoriser : 17/10 +563/100 = 170/100 + 563/100 = 733/100.

Là encore, l'algorithme prendra tout son sens après la bascule dans l'écriture virgulaire.

Multiplication de deux fractions

On peut facilement introduire ax(b/c), en s'appuyant sur la multiplication sous l'angle de l'addition itérée (qui fournit (ab)/c). On peut de même présenter le cas (a/b)/c en s'appuyant sur le raffinement des gradations d'où l'équivalent a/bc. On en déduit assez facilement la définition du produit (a/b)x(c/d) ≡ ac/bd.

Cette rencontre ne peut qu'être fortuite à l'école primaire, mais tel n'est pas le cas du produit de deux décimaux, proposé plutôt en fin de CM 2. On propage la notion de subdivision de la droite numérique par 10 à la subdivision de rectangles par 10 x 10.

Ruptures épistémologiques

L'enseignement ne peut pas les prendre en compte.

¤ Entre deux fractions, il y a toujours d'autres fractions et donc la notion de fraction juste après une fraction donnée n'a pas de sens. Cet aspect est particulièrement travaillé dans le cas des décimaux.

¤ Le fait de multiplier un nombre x par un nombre y ne produit plus systématiquement un nombre plus grand (multiplier n'est pas synonyme de croitre).

Pour l'exposé proprement dit

Ayant défini sa trame, on doit encore choisir le niveau de la classe.

Il me semble plus facile de s'en tenir au CM1 car on aura moins la tentation d'oublier les écritures fractionnaires au profit des écritures décimales.

Au CM 2, les décimaux n'apparaissent plus qu'épisodiquement sous la forme d'écritures fractionnaires ; sous leur forme virgulaire ils tendent à devenir de simples outils pour résoudre diverses sortes de problèmes.

Le plan de l'exposé est assez classique :

¤ Rappels de définitions
¤ Lecture commentée des textes officiels
¤ Développements théoriques
¤ Présentation d'une progression possible mais limitée
¤ Conclusion rapide.

Idée de progression au CM1 :

1/ Les enfants vont rencontrer de nouveaux nombres.

Il est tout à fait fondamental que les élèves se persuadent qu'il s'agit bien de nombres et pas de simples écritures.

Il n'y a qu'une seule façon de conférer à ces objets mathématiques qu'il s'agit bien de nombres : comme déjà indiqué ci-dessus montrer i) qu'ils contiennent les nombres déjà connus (problème de recollement des modèles) et ii) qu'ils permettent des calculs. En CM 1 on se contentera de faire additionner des fractions de même dénominateur ou des décimaux à dénominateur au plus 100.

On en déduit un séquençage pour le CM 1 :

a) Approche contextualisée des fractions : il s'agit de s'appuyer sur l'usage courant des noms de fractions souvent utilisées (demi, tiers, quart).

On utilise le fait que dans la vie courante, les fractions fonctionnent comme des indicateurs

de partage équitable. Les situations proposées supposent donc une bonne compréhension de la multiplication sous l'angle des opérateurs fonctionnels.
On ne saurait introduire cette notion trop tôt dans l'année.
b) Appropriation du codage fractionnaire comme outil pour résoudre des problèmes de mesurage d'une certaine longueur : on commence par faire produire des fractions d'une bande unité, puis on fait évaluer diverses longueurs grâce à des fractions.
Repérer que les fractions peuvent être perçues comme des opérateurs (mais ce terme est banni) ou des scalaires car ils agissent sur des étalons (alias des unités de mesure).
On n'est pas encore tout à fait dans le nombre.
c) Pour basculer dans le nombre (donc se débarrasser de l'unité de mesure), il faut verser dans le contexte de la droite graduée : comment trouver un moyen fiable pour rendre compte, à l'aide de nombres, de la position d'un point ?
Il faut donc inventer une machine à subdiviser un segment (qu'on continuera d'appeler unité) en x parts, quelque soit sa longueur effective.
Concrètement, on forge des bandes b-ièmes (bande des demis, des quarts, des cinquièmes, des dixièmes) sur lesquelles on manipule pour produire diverses écritures fractionnaires, dont celles codant les entiers (17 = 34/2).
d) Un travail fondamental consiste à recoller certaines bandes., particulièrement celle des demis et des quarts, celle des demi et dixièmes, puis celle des dixièmes et des centièmes.
On installe l'idée selon laquelle un même nombre peut s'écrire de diverses façons.
e) Réinvestir la notion de fraction comme outil de calcul général.
On prend le prétexte de la mesure des aires à cet effet (ne pas confondre avec les parts de tarte). On s'assure en particulier de la compréhension de fractions plus grandes que 1.
f) Retour à la droite numérique : on place des fractions entre deux entiers, ce qui permet d'installer la notion de partie entière et de partie fractionnaire.
g) Le travail précédent est particulièrement simple quand les dénominateurs valent 10 ou 100 : on structure l'ensemble des fractions décimales fréquentées selon la puissance de leur dénominateur d'où l'enchâssement $D0 \subset D1 \subset D2$.
h) On apprend à comparer des décimaux et à les utiliser dans des activités de mesure de longueurs (en lien avec les unités usuelles) comme à calculer avec.
Mais ce travail ne trouvera vraiment son sens que lorsqu'on aura basculé vers la problématique de l'écriture virgulaire des fractions décimales

Mais on atteint ici les limites du sujet.

Idée de progression au CM2 :

1/ On est sans doute obligé de rappeler en très grandes lignes ce qui a été fait au CM1 : a) approche contextualisée des fractions, d'abord avec le partage d'une bande unité, puis dans le contexte de la droite graduée (comment trouver un moyen fiable pour rendre compte, à l'aide de nombres, de la position d'un point), enfin dans le contexte des aires, ce qui permet d'assurer la compréhension de fractions plus grandes que 1. b) calculs simples sur des fractions et installation de la notion de partie entière. Les dénominateurs restent simples et peuvent renvoyer à des expériences fortement socialisées (demi, quart, tiers, cinquième et dixième). d) Bascule sur les décimaux.

2/ **Ici commence le séquençage à proprement parler pour le CM 2**.

Reprise de la notion de fractions dans le cadre du raffinement de la gradation de la droite numérique : au lieu de faire plier une bande, on fait apparaître les tiers du segment unité, puis de tous les segments de longueur 1. On identifie systématiquement les entiersavec leur écriture fractionnaire : 1/3 2/3 3/3=1 4/3 5/3 6/3 = 2 etc.

3/ Fractions au quotidien :

¤ on retrouve des parts de plusieurs tartes ; la notion de fraction est un outil pour résoudre des problèmes de partage, mais les parts de tarte n'ont pas servi à introduire le concept de fractions ;

¤ Fractionnement de l'heure : demi-heure, quart d'heure, valeur en minutes.

4/ Cas spécifique des fractions a/10 , b/100 c/100.

Production d'écritures de type e + a/10 + b/100 + c/1000.

Repérage sur la droite numérique, recherche de fractions décimales approchées par défaut ou par excès, en attente de 5.

Application à la mesure de longueur ou du temps et retour sur les conversions.

Retour sur les notions de dixième, centième, millième par opposition à celles de dizaine, centaine, millier. Extension du tableau de numération en attente de 7.

4^{bis}/ Vers les fractions équivalentes : 1/2 vs 5/10 1/5 vs 2/10, 1/4 vs 25/100 etc.

5/ Encadrement de fractions par des entiers dans le cas des fractions simples [dénominateur à 1 chiffre] ou décimales.

Applications : systématisation des notions de partie entière ou fractionnaire, comparaisons.

6/ Décompositions additives, calculs simples dont multiplication par un entier.

7/ La suite du séquençage concerne uniquement les fractions décimales et leur manipulation sous forme d'écritures virgulaires.

Je ne suis pas certain qu'il faille développer ce séque,çage sous peine d'être hors sujet.

On peut sans doute profiter de la conclusion pour montrer les séances à venir :

- Retour sur l'écriture virgulaire des fractions décimales et conquête des dix millièmes
- Algorithmes opératoires de l'addition et de la soustraction dans le cas des décimaux
- Comparaison des décimaux
- Multiplication par 10, 100 ou 1 000 d'un décimal puis multiplication d'un décimal par un nombre entier
- Retour sur la mesure des longueurs : expression sous forme d'un décimal pour une unité choisie. Même travail avec les aires

  Comparaison entre "changer pour une unité de mesure plus fine" et "multiplier la valeur de la mesure par 10 ou 100"
- Les décimaux pour exprimer des quotients

  Division d'un nombre décimal par un nombre entier
- Vers la multiplication d'un décimal par un décimal.