Passage d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement en CM 1.

Liens internet

http://www2.ac-lyon.fr/etab/ien/rhone/mions[...]s.pdf
[Un PDF par P.A. Deguillaume de41 pages sur le thème "Des fractions aux décimaux".]

http://primaths.fr/futurs%20maitres%20oral/competences%20c3/cm1ecrituredecim.html
Une *tentative* de réponse au sujet.

http://www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/parcours/Par02P2M2.asp
Une page tirée du site TFM, qu'on ne présente plus, dédiée au sujet.
Attention : concernant certains éléments théoriques didactiques, la page s'appuie sur des textes de 2002 ou 2005, bannis depuis. Ne pas s'effrayer ! Les citations proposées gardent tout leur sens.

Analyse à priori

¤ **Écriture**

Système de signes permettant de mémoriser et transmettre des informations.
Dans le champ numérique, nous avons "inventé" une suite d'ensembles de nombres emboités N, D, Q, R, et pour chacun de ces ensembles, nous avons inventé un/des système/s de codage.
Pour les nombres entiers, il s'agit de la numération décimale de position. Cf. infra.

¤ **Écriture fractionnaire**

Cette écriture s'applique aux rationnels (éléments de Q). Elle est de la forme a/b, a et b étant deux écritures représentants des entiers.
Contrairement à l'écriture décimale de position des entiers, cette écriture n'est pas unique : 1/8, 5/40, 25/200, 125/1000 sont des écritures valides désignant le même nombre (le même rationnel).
Quand on se restreint aux seules fractions décimales, les écritures fractionnaires deviennent uniques à facteur 10 près : 52/10 = 520/100 = 5200/1000 etc.
L'écriture fractionnaire des fractions décimales est au plus proche de leur genèse : 52/10 signifie que l'on a coupé l'unité en dix parties égales puis qu'on a assemblé 52 de ces parties.

¤ **Écriture décimale**

On doit à Stevin de Bruges (1548-1620) l'invention des écritures décimales, et ce en vue de simplifier les calculs de ses contemporains. Par convention 52/10 = 5,2 52/100 = 0,52 etc.
Mais contrairement aux entiers dont l'écriture ne supporte pas de zéros excédentaires à gauche, les écritures virgulaires acceptent des zéros supplémentaires à droite : 5,5 = 5,20 = 5,200.

¤ **Écriture et calcul**

¤ **Les fractions décimales se laissent facilement additionner si elles ont même dénominateur**. Sinon, il faut convertir : 52/10 + 813/10 = 867/10 ; 52/10 + 813/100 = 520/100 + 813/100 = 1333/100 .
¤ **Les fractions décimales se laissent facilement multiplier par un entier**, puisque, in fine, seul le numérateur est en jeu : 4 x 52/10 = 208/10 car 4 x 52 = 208.
¤ **Le produit de deux fractions décimales est plus complexe à installer** ; c'est pourquoi on ne travaille que le produit de dixièmes par des dixièmes (et encore en fin de CM2).
¤ **Les écritures décimales se laissent facilement additionner** ; l'algorithme pour les entiers se prolonge aux décimaux à condition de formater les écritures : 5,2 + 8, 13 = 5,20 + 8,13 = 13,33.

¤ **Les écritures décimales se laissent multiplier par un entier**. Classiquement on s'appuie sur une addition itérée pour introduire l'algorithme.
¤ L'algorithme de la multiplication posée pour les entiers se prolonge facilement aux décimaux ; on constate que les élèves de CM2 ne rencontrent pas de difficultés massives sur ce point.

¤ **Problème de fondement : l'habit ne fait pas le moine**

Les écritures n'existent pas sans les objets qu'elles codent.

¤ Les entiers sont fondés pour compter des collections d'objets (cardinal) ou énumérer des positions (ordinal). L'humanité a inventé de nombreux systèmes pour écrire les nombres entiers, c'est le champ de la numération. Nous avons fini par fixer un système s'appuyant sur les regroupements par 10 (100, 1000, etc.) d'où notre numération décimale de position (notre numération "parlée" est plus archaïque).

¤ **Les fractions sont conçues pour pallier l'insuffisance des nombres entiers**. On raisonne ici dans le seul cas des fractions décimales, id est à dénominateur une puissance de 10 :

- Insuffisance algébrique : l'équation 10^n x A = B, où n est un entier et B est un nombre entier non multiple de 10^n n'admet pas de solution dans N.
- Insuffisance de mesure : soit A un entier et U une unité de longueur ; il est impossible de mesurer une longueur comprise strictement entre AxU et (A+1)xU avec un nombre entier. Il est possible d'inventer une seconde unité, c'est ce qu'on fit longtemps ; mais le système n'est pas homogène et ne facilite pas les calculs. D'où l'idée de fractionner U en 10u ou 100u' etc.
- Problème de repérage sur la droite numérique. Clairement, entre les termes de la graduation entière de la droite numérique, il y a beaucoup de trous ! De même que l'on a inventé des sur-gradations, par 10, par 100, etc. pourquoi ne pas inventer des sous-gradations (effet d'inversion ou de miroir) ?

¤ **Les fractions s'assemblent en classes d'équivalence** (1/3 = 2/6 = 5/15 …) : les fameux rationnels. Ces rationnels n'ont pas d'étiquètes propres : les fractions irréductibles pourraient l'être, mais la norme n'a pas été figée, en sorte que n'importe quelle fraction représentative sert à nommer le rationnel dont elle dépend. <u>Les enfants ne sont pas confrontés à cette problématique au Cycle 3</u>.

¤ **Liens avec le système métrique**

On doit à la Révolution Française d'avoir décimalisé les mesures en introduisant des étalons et des sous- ou sur- étalons déciles ou décuples de l'étalon. Ainsi :

1 kg = 1 000 g   1 km = 10 hm = 100 dam = 1 000 m   1 m = 10 dm = 100 cm 1 000 mm   …

Les nombres décimaux permettent alors d'exprimer des mesures relatives à une grandeur de façon plus simple (homogène ?) que le dispositif employant des combinaisons d'unités variables.

On peut d'ailleurs profiter de cette section pour rappeler que toutes les introductions de *nombres à virgule* à travers des mesures complexes sont néfastes, dans la mesure où elles propagent le théorème-élève –faux- "*un décimal égale 2 entiers séparés par une virgule*".

¤ **Les difficultés rencontrées par les élèves du Cours moyen**

La compréhension d'une notion suppose aussi celle des moyens d'expression qui lui sont liées.

¤ <u>Manipulation des écritures fractionnaires</u>

- Les écritures fractionnaires ne sont pas comprises par certains élèves qui pourront par exemple traduire 52/10 en 52,10 ; dans les deux cas, l'écriture est perçue comme la donnée de deux entiers séparés par une marque de ponctuation.
- Les élèves ne savent pas trouver les deux entiers encadrant la fraction décimale proposée : 813/100 est comprise entre 800/100 et 900/100, soit 8 et 9.

- Les élèves ne savent pas comparer deux fractions si elles n'ont pas même dénominateur : 813/100 pourra être déclaré plus grand que 52/10.

¤ Manipulations des écritures virgulaires

- La signification des chiffres d'une écriture virgulaire en fonction de leur rang n'est pas assurée. Confusion entre dixième et dizaine, centième et centaine, erreur de repérage du fait d'une lecture en miroir autour de la virgule (dizaine c'est le deuxième chiffe avant la virgule, donc dixième c'est le deuxième chiffe après la virgule).
  Confusion de type désignant/désigné (dizaine, dixième sont perçus comme désignant des rangs et non des valeurs – dans 245,86 il y a 24 dizaines et 2458 dixièmes).
- Prolongement erroné du critère de comparaison des entiers au décimaux. A partie entière égale, de nombreux élèves comparent les parties décimales comme s'il s'agissait d'entiers ; 52,32 > 52,2.
- Difficulté avec l'intercalation d'un décimal entre deux décimaux. A la question "proposer un nombre compris entre 5,2 et 5,4" la plupart des élèves proposent 5,3, mais à la même question portant sur une intercalation entre 5,2 et 5,3, de nombreux élèves *refuseront* de répondre.

Dans les programmes pour le Cycle 3

¤ **Dans le paragraphe 1 –Nombres et calcul** :

[…]**Les nombres décimaux et les fractions** :

- fractions simples et décimales : écriture, encadrement entre deux nombres entiers consécutifs, écriture comme somme d’un entier et d’une fraction inférieure à 1, somme de deux fractions décimales ou de deux fractions de même dénominateur ;

- nombres décimaux : désignations orales et écritures chiffrées, valeur des chiffres en fonction de leur position, passage de l’écriture à virgule à une écriture fractionnaire et inversement, comparaison et rangement, repérage sur une droite graduée ; valeur approchée d’un décimal à l’unité près, au dixième près, au centième près.

¤ **Dans le paragraphe 3 –Grandeurs et mesure** :

Les longueurs, les masses, les volumes : mesure, estimation, unités légales du système métrique, calcul sur les grandeurs, conversions, […]

¤ **Dans le 2ième palier pour la maîtrise du socle commun (fin de CM 2)** :

A) Les principaux éléments de mathématiques

L’élève est capable de :

- écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux (jusqu’au centième) et quelques fractions simples ;
- utiliser les techniques opératoires des quatre opérations sur les nombres entiers et décimaux (pour la division, le diviseur est un nombre entier) ; […]
- utiliser les unités de mesure usuelles ;[…] ; effectuer des conversions ;

¤ **Dans les progressions pour le cycle 3 :**

Chapitre Nombres et calcul :

Au CM 1 :

Fractions

- Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième.
- Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.

Nombres décimaux

- Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/100ème).
- Savoir :
. les repérer, les placer sur une droite graduée,
. les comparer, les ranger,
. les encadrer par deux nombres entiers consécutifs,
. passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement.

Calcul

Calculer mentalement

[…]

- Multiplier mentalement un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000.
- Estimer mentalement un ordre de grandeur du résultat.

Effectuer un calcul posé

- Addition et soustraction de deux nombres décimaux.
- Multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier.
- Division euclidienne de deux entiers.
- Division décimale de deux entiers.

[…]

Au CM 2 :

Bien que hors sujet, permet de délimiter la présentation.

Fractions

- Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs.
- Écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.
- Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur.

Nombres décimaux

- Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/10 000ème).
- Savoir :
. les repérer, les placer sur une droite graduée en conséquence,
. les comparer, les ranger,
. produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant 10 ; 100 ; 1 000... et 0,1 ; 0,01 ; 0,001...
- Donner une valeur approchée à l'unité près, au dixième ou au centième près.

Calcul

Calculer mentalement

- Consolider les connaissances et capacités en calcul mental sur les nombres entiers et décimaux.
- Diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1 000.

Effectuer un calcul posé

- Addition, soustraction, multiplication de deux nombres entiers ou décimaux.
- Division d'un nombre décimal par un nombre entier

Listage (partiel ?) d'activités au CM1.

¤ Le sujet est centré sur le passage d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement au CM1. Il est sans doute loisible d'exposer en liminaire les éléments fondamentaux de la construction des fractions, puis des fractions décimales d'ordre 1 ou 2.

¤ On trouvera page suivante quelques-uns de ces éléments avant l'esquisse resserrée du sujet.

Conquête de la notion de fraction

Première approche

Les fractions au quotidien ; évocation de situations courantes dans lesquelles les fractions sont utilisées : quart, tiers, moitié. Ces fractions agissent plutôt comme des opérateurs.

Partages de longueurs

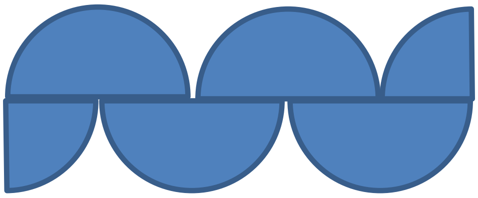
Une unité de longueur *U* étant arbitrairement choisie, celle-ci est partagée en un certain nombre de parties égales. Il est alors loisible de mesurer des longueurs qui ne sont pas multiples de *U*.
Introduction d'écritures a/b *U* et conversions a/b *U* = e *U* + d/b *U* avec d < b.
Les partages se font par pliage ou par appel au guide-âne.

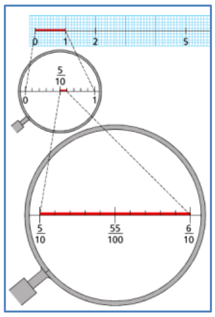
Graduations

Repérage de positions codées par une fraction. L'unité U devient implicite.

Fractions et partage d'aires

Permet de casser une première représentation enfantine : l'aire n'est pas toujours multiple de l'unité. On renforce ainsi le statut de nombre des fractions tout en affinant le concept de la mesure de l'aire.
Exemple ci-dessous : l'aire du disque étant choisie comme unité, aire du motif ci-dessous.





Irruption des fractions décimales

$\boxed{\textbf{S 1}}$ Dans une reprise du partage de longueur, l'unité est divisée en 10, puis 100 parties égales. Exemple pris dans EuroMaths ci-contre.

Repérage de fractions égales à des entiers (exemple 50/10), d'écritures équivalentes (850/100 = 85/10), encadrement de fractions décimales par des entiers consécutifs. Placement sur la droite numérique de fractions décimales (suppose de recourir à du papier millimétré).

Renforcement du sens dixième, centième (combien de … dans …).

Transcodages : 247/100 = 2 + 47 /100 = 2 + 4/10 + 7/100

$\boxed{\textbf{S 2}}$ Vers l'addition des fractions décimales. Cas simple : même dénominateur (10 ou 100). Cas complexes : recherche d'un dénominateur commun (comme dans 341/100 + 54/10 = ?) ou addition de fractions morcelées (3/10 + 5/100) + (2 + 4/10 + 7/100) = ?

Découverte des écritures décimales

$\boxed{\textbf{S 1}}$ Bascule de N/10^p à $\overline{e, dcm}$.

Confrontation des deux types d'écriture.

Edition d'un tableau de numération.

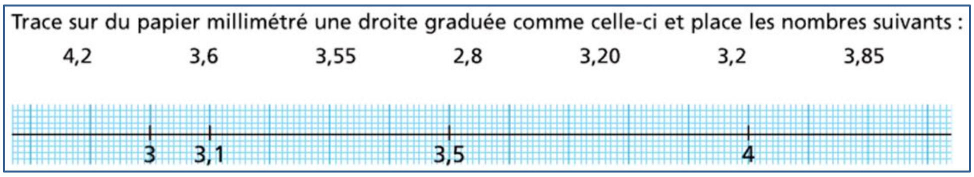
Systématisation des décompositions additives (12,05 = 12 + ?/? ; 1 + ?/? = 17/10 ; 5,?6 = ? + 4/10 + ?/? ; etc.)

100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1\,000}$
Centaine	Dizaines	Unités ,	dixièmes	centièmes	millièmes
		6	5	3	7
	8	9	3	1	
	5	4	6		
		5	4	6	

$\boxed{\textbf{S 2}}$ Comparaison de nombres décimaux. *Il s'agit ici de mettre en place des procédures personnelles. Les procédures systématiques, assises sur la maitrise du code de l'écriture virgulaire ne viendront qu'au CM 2.*

Activité préparatoire : jeu de cache-tampon numérique (un nombre décimal, dont le nombre de chiffres après la virgule a été fixé par l'enseignant(e) doit être trouvé par les élèves).

Placement sur une droite numérique de nombres décimaux, comme dans cet exemple issu du manuel EuroMaths :



Jeu de la corde à linge : des étiquètes portent des nombres décimaux ou des fractions décimales. Sur la corde fixée au tableau, des étiquètes sont déjà installées grâce à des pinces à linge. On demande aux élèves de placer les autres étiquètes.

Jeu des écritures : quatre cartons doivent être placés cote à cote pour produire des écritures décimales correctes. On demande de chercher toutes les écritures puis de les ranger, par exemple dans l'ordre croissant. Exemples de jeux de cartons : [0] [5] [2] [,] ou [0] [0] [9] [9] [,] etc.

Institutionnalisation : Quand on compare des décimaux, le nombre de chiffres de chaque écriture n'est pas un bon indicateur.

S 3 Lien avec les mesures de longueur. Associer des sous-unités à des écritures décimales pour l'unité choisie (exemple : 1 mm = 0,001 m). Reconsidérer les tableaux de conversion de mesures sous l'angle des tableaux de numération. Exemple pris dans EuroMaths encore une fois :

Écris en mètres les longueurs suivantes. Tu peux t'aider du tableau de conversion.

a. 20 cm   c. 4 m 3 dm 5 cm   e. 4 m 2 cm   g. 2 km
b. 6 cm 5 mm   d. 2 m 12 cm   f. 6 m 3 dm   h. 1 km 500

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0

Vers le calcul des décimaux

Cette section fait partie du sujet dans la mesure où l'installation des algorithmes s'appuie sur le passage des écritures fractionnaires au écritures virgulaires.

S 1 Addition et soustractions de décimaux.

Retour aux écritures fractionnaires pour installer l'algorithme de l'addition en colonnes. Installation d'un nouveau calage : c'est la virgule qui doit être calée, plus le chiffre le plus à droite. Recours éventuel à un abaque camouflé comme dans l'exemple ci-contre.

100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
centaine 1 2 +	dizaines 1 4 5	unités 1 6 7	, dixièmes 5 8	centièmes 6 0
3	0	4	3	6

Calcul réfléchi par jalonnement (1,6 + 2, 34 = 3,6 + 0,34 = 4 – 0,06 = 3,94) ou par complémentation (Pour aller de 1,7 à 2,34, je commence à avancer de 0,3 , je suis en 2, il ne me reste plus qu'à avancer de 0,34; au final, j'ai du avancer de 0,64).

Installation d'un algorithme de soustraction posée, en s'appuyant éventuellement sur un abaque.

Résolutions de problèmes divers.

S 2 Multiplication d'un nombre décimal par 10, 100, 1000 : retour sur les écritures fractionnaires. Edition d'une nouvelle règle des zéros.

S 3 Multiplication d'un décimal par un nombre entier. Le calcul revient à un calcul sur des nombres entiers. L'installation de l'algorithme peut passer par un retour aux écritures fractionnaires, une ré utilisation de l'addition itérée pour interroger l'algorithme en colonnes.

La division décimale de deux entiers ne me semble pas faire partie de cette leçon.

Voir aussi la brochure "Le nombre au cycle III", à télécharger depuis Eduscol.