Division euclidienne de 2 entiers au CM1

Dans les programmes

Dans les programmes du cycle 3, cette notion n'apparaît pas explicitement. On sait qu'au cycle 2 (comprendre en fin de CP et au CE 1) *des problèmes de groupements et de partage permettent une première approche de la notion de division*. Mais le législateur a laissé son stylo en route par la suite.

Dans le premier palier du socle commun (fin de cycle 3) :

- utiliser les techniques opératoires des quatre opérations sur les nombres entiers et décimaux (pour la division, le diviseur est un nombre entier) ;
- calculer mentalement en utilisant les quatre opérations ;

[…]

- résoudre des problèmes relevant des quatre opérations, […]

Progressions pour le CM 1 :

Effectuer un calcul posé :

[…]

- Division euclidienne de deux entiers.
- Division décimale de deux entiers.

Ce ne sont donc pas les textes officiels qui vont beaucoup nous aider !

Éléments théoriques

Une première approche de la division

¤ Dans le champ multiplicatif, rencontre de multiplications à trou, de problèmes de partages ou de groupements : notion de division-partition et de division-quotition.

¤ Attention : dans ces problèmes, *ça tombe juste*, l'idée de reste ne fait pas (encore) sens.

¤ On rencontre ces situations au CE 1. Noter qu'il ne s'agit pas là de la division euclidienne.

Une deuxième approche à partir des tables de multiples

¤ N est archimédien : soit a et b deux entiers, alors il existe un seul k tel que $ak <= b < a(k+1)$.

¤ Illustration : course à 20 par sauts de 1, 2 ou 3. Distribution équitable d'une collection entre p participants avec minimisation du reste. Plus généralement les deux familles de problèmes de division, mais avec reste cette fois. Ces situations sont proposées au CE2. Pas nécessairement d'algorithme efficace de calcul.

¤ Modélisation : Le fameux couple $A = BQ + R$ avec $R < B$.

Prolongements

¤ Retour sur la notion de quotient entier : prolongement au quotient décimal de deux entiers. Ce prolongement est rendu nécessaire parce que divers problèmes de partage ne sont pas bien résolus. Typiquement, il s'agit des partages de quantités non discrètes

(15 litres d'eau dans 8 récipients, 150 euros entre neuf parieurs, etc.°

Définition : soient a et b deux entiers. q est le quotient entier de a par b, r le reste. On peut diviser 10r par b, d'où un certain quotient q_1 et un certain reste r_1. Alors $q+q_1/10$ est le quotient décimal d'ordre 1 de a par b. On peut continuer : on peut diviser $10.r_1$ par b d'où un certain quotient q_2 et le reste associé r_2. Alors $q+q_1/10+q_2/100$ est le quotient décimal d'ordre 2 de a par b. etc. Il est important de noter que les quotients q_1, q_2, etc. sont tous des entiers compris entre 0 et 9. De sorte que le quotient décimal d'ordre p de a par b n'est rien qu'une approximation décimale d'ordre p du rationnel a/b. La recherche de ces quotients décimaux de 2 entiers jusqu'à n'importe quel ordre supposent de la part des élèves une bonne compréhension des décimaux. Au CM on fixe à l'avance le degré p voulu, à moins que la situation, suffisamment contextualisée, l'indique fortement (la monnaie pousse aux centimes, donc ordre 2).

¤ On est donc amené à parler de quotient décimal approché par défaut ou par excès ou encore d'approximations par défaut, par excès, au dixième, au centième, au millième près.

¤ Prolongement simple aux décimaux divisés par un entier: soit $a/10^p$ un décimal et b un entier. Alors il existe q et r tels que a = bq + r, r < b d'où : $a/10^p = b.(q/10^p) + (r/10^p)$. On rencontre cette situation chaque fois que l'on veut exprimer le résultat d'un partage équitable (au sens large) d'une grandeur exprimée par un décimal. Exemple : longueur du tiers d'un coupon de 18m20. $1820 = 3x606 + 2 \Rightarrow 18,20 = 3x6,06 + 2/100$. L'apprentissage de cette notion est réservée au CM2.

¤ Algorithme(s) de calculs. Dans un premier temps, on peut se contenter de rechercher le quotient en circulant dans des tables de multiples partielles plus ou moins organisées. Mais rapidement, le procédé devient trop lourd et il faut maîtriser un algorithme de calcul.

L'apprentissage de l'algorithme de la division entière est le plus difficile. Les élèves doivent en effet savoir : i) prévoir le nombre de chiffres du quotient (ce qui suppose une bonne anticipation soutenue par des capacités réelles de calcul approché) j) calculer divers multiples successifs du diviseur (maîtrise du répertoire multiplicatif) pour ensuite savoir poser les soustractions successives (maîtrise du répertoire additif); les élèves doivent par ailleurs avoir une bonne maîtrise spatiale pour écrire les chiffres voulus au bon endroit, sans compter une bonne gestion des retenues.

Le passage à l'algorithme de la division décimale ne pose pas réellement de difficultés.

Séquençage pour le CM1

Ce qui suit s'inspire du LdM d'EuroMaths.

Chantier 0 : Retour sur la division découverte au CE 2 (révisions et renforcements) : problèmes de multiplication et division ; approfondissement du répertoire multiplicatif ; travail sur les multiples.

Chantier 1 : 2 séances sur le sens de la division euclidienne

¤ Dans une première séance, préparation d'un algorithme de calcul (déjà abordé au CE 2). Sous prétexte de problèmes de division-partition (avec reste) trois méthodes sont

étudiées : α) une méthode par essais successifs de produits de la valeur d'une part, β)une méthode par additions successives de multiples de la valeur d'une part, γ) une méthode par soustractions successives de multiples de la valeur d'une part. Cette leçon est aussi l'occasion de réintroduire l'écriture en ligne A=BQ+R.
¤ Dans une seconde séance, résolution de problèmes de division-quotition (avec reste). Les élèves découvrent que le processus de calcul est le même que pour les situations précédentes.
Ce qui change, ce sont les simulations de l'action que ces procédures représentent : lorsque l'on cherche le nombre de parts connaissant la valeur d'une part, on cherche combien de fois cette valeur est contenue dans le tout ; tandis que lorsque l'on cherche la valeur d'une part connaissant le nombre de parts, on fait des hypothèses sur cette valeur jusqu'à trouver la plus grande possible.
<u>Chantier 2</u> : 4 séances pour la conquête d'un algorithme opératoire
¤ Dans une première séance on systématise le procédé de calcul par des soustractions successives de multiples bien choisis du diviseur. La division est donc maintenant reconnue comme opération intervenant dans les deux types de problème dits de division. Cette séance a pour but de privilégier une méthode de calcul.
¤ Dans une seconde séance, on revient sur l'écriture en ligne de la division. Il s'agit ici d'associer correctement les termes d'une écriture composite (a × b) + c aux éléments de problèmes de division et d'identifier dans quel cas c est un reste. C est un reste si et seulement si l'un des deux termes a ou b est le quotient, ce qui signifie que l'autre (b ou a) est le plus grand possible (on cherche le plus grand multiple possible). Ce qui reste est donc un bon indicateur de l'avancée de l'algorithme.
¤ La troisième séance est consacrée à la recherche du nombre de chiffres au quotient. Il s'agit de savoir prévoir le nombre de chiffres du quotient pour minimiser le nombre de soustractions à effectuer. Les quotients successifs sont écrits (200 puis 60 enfin 5 pour la division de 7432 par 28) Dans ce mode de calcul, il faut donc assembler les quotients partiels.
¤ La quatrième séance est dédiée à la conquête de l'algorithme classique. Les 0 des quotients partiels deviennent des petits points, pratiquement masqués à la fin du process. Il est fortement historicisé, à l'oral, pour assurer les automatismes nécessaires.
<u>Chantier 3</u> : 2 séances, vers l'algorithme de la division décimale (entier par entier et décimal par entier). Je ne développe pas ici. Ces séances ont obligatoirement lieu en fin d'année.
La maitrise de l'algorithme est renforcé par une pratique régulière du calcul posé. De temps en temps calcul réfléchi pour anticiper la valeur du quotient. Vérification à la calculette après écriture de la division en ligne.