Les décimaux au CM1

Dans les programmes

1 - Nombres et calcul

Les nombres décimaux et les fractions : fractions simples et décimales : écriture, encadrement entre deux nombres entiers consécutifs, écriture comme somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1, somme de deux fractions décimales ou de deux fractions de même dénominateur ;

- nombres décimaux : désignations orales et écritures chiffrées, valeur des chiffres en fonction de leur position, passage de l'écriture à virgule à une écriture fractionnaire et inversement, comparaison et rangement, repérage sur une droite graduée ; valeur approchée d'un décimal à l'unité près, au dixième près, au centième près.

2- Au niveau des progressions

Fractions : 1/ Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième. 2/ Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.

Nombres décimaux : 1/ Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/100ème). 2/ Savoir : les repérer, les placer sur une droite graduée, les comparer, les ranger, les encadrer par deux nombres entiers consécutifs, passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement.

Éléments théoriques :

1/ Les entiers ne permettent pas de toujours de traiter certains problèmes : diviser une quantité (penser à un liquide, 3 L par exemple) en un certain nombre de parts (des verres, 8 par exemple), répartir des poteaux de façon régulière (par exemple 9, un à chaque extrémité) sur une longueur donnée (500 m).

2/ Au choix :

i) Si l'on est matheux, on veut pouvoir résoudre l'équation à coefficients entiers 10.x = b (exemple 10.x = 15; on codera la réponse 15/10 ou 1,5).

Plus généralement $10^n.x = b$.

ii) Si l'on veut garder un certain sens concret, on peut vouloir marquer des positions dans l'intervalle [0, 1] et les repérer (les nommer) par des écritures utilisant des chiffres, dans le prolongement de ce que l'on fait avec des entiers.

Concrétisation : on subdivise le segment en dix portions égales et ce sont ces subdivisions que l'on encode. Plus généralement on subdivise en 10^n et on propage à toute la droite numérique.

3/ Définition (emboitée) des décimaux (d'ordre 1, d'ordre 2, etc.)

On est amené à produire des ensembles $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_3 \subset$ etc. $\subset \mathcal{D}$

On tient une définition récursive, en miroir de celle des entiers : un centième est un dixième de dixième comme une centaine est une dizaine de dizaines.

4/ Écritures : Écriture fractionnaire ou écriture virgulaire ?

Les deux sont légitimes et s'interpellent l'une l'autre. L'écriture fractionnaire raccroche les décimaux aux fractions et donne du sens (position) aux chiffres de l'écriture décimale (2 chiffres après la virgule, on est dans les centièmes).

5/ Raccordements entre les ensembles de nombres :

¤ Immersion des entiers dans les décimaux ;

¤ liens entre les décimaux et les fractions ;

¤ Partie entière, partie décimale.

On en déduit :

6/ Prolongements des lois définies sur N :

C'est parce que D possède les lois énoncées ci-dessous qu'il s'agit bien d'un ensemble de nombres, permettant calculs, prévisions, estimations, modélisations !

¤ Ordre sur les décimaux qui ne prolonge pas complètement la définition sur les entiers (un décimal peut avoir une écriture plus longue qu'un autre et ne pas nécessairement être plus grand, même si les deux parties entières sont égales) ;

¤ Loi d'addition : on peut s'appuyer sur le raffinement des gradations (stratégie de la règle coulissante si on ne travaille que sur les écritures) ou réinterpréter via les fractions (1,3 + 0, 45 = 130/100 + 45/100 = 175/100 = 1,75) ;

¤ Loi de multiplication : on revient sur la présentation des nombres en rectangle (que l'on subdivise) ou on travaille sur les écritures seules (0,1 x 10 = 1 donc …) ;

7/ 2 Stratégies d'introduction :

- ***Stratégie n° 1*** = introduction directe des décimaux à partir d'un problème de repérage de points sur la droite numérique ; cette introduction amène à raffiner des bandes numériques en dixièmes puis en centièmes.
  Ce travail peut servir de modèle précurseur pour la construction des fractions, mais l'inverse est aussi vrai. Cette stratégie s'appuye sur la vision ii) du point 2/.
- ***Stratégie n° 2*** = introduction des fractions puis restriction aux seules fractions à dénominateur 10 puis 100 (pour le CM1). L'introduction peut se faire en fractionnant des bandes par 10, puis par 100 ou en partageant équitablement des ensembles en dixièmes d'ensembles.
- La seule introduction qui n'est pas acceptable : présenter les décimaux comme écriture concaténée via une virgule de deux mesures usant d'unités différentes, par exemple des prix ou des mesures de longueurs. On voit de telles écritures dans les manuels dès le CE 1 -au prétexte de proposer aux élèves des problèmes de la vie courante, mais ces manipulations ne sauraient servir de terreau à la construction des décimaux. En effet (Cf. infra) elle installe chez l'enfant une représentation fausse du nombre décimal. Bien au contraire conviendra-t-il de réinterpréter les écritures à unités multiples avec une seule unité dès que les décimaux seront disponibles. Les exercices de conversion pourront un moment propice pour cette réinterprétation.
- Attention aux ruptures épistémologiques que l'enseignement devra prendre en compte, et qui se résument par "un décimal n'est pas la donnée de 2 entiers séparés par une virgule" :
  i) Problème de l'intercalation = entre deux décimaux, il y a toujours d'autres décimaux => la notion de décimal juste après un décimal donné n'a pas de sens
  ii) la règle des zéros est modifiée (multiplier par 10 ne fait pas toujours poser un zéro à

droite de l'écriture chiffrée, on peut diviser par 10 -resp. 100- autant de fois que l'on veut)

iii) le fait de multiplier un décimal par un autre décimal ne produit plus systématiquement un nombre plus grand (multiplier n'est pas synonyme d'agrandir).

Pour l'exposé

La notion est très mal maitrisée par les élèves entrant en sixième. On peut penser que les membres du jury soit très sensibles à ce manque de performance.

Il est sans doute bon de rassurer le jury en exhibant sa culture mathématique, plus particulièrement sur ce sujet que sur d'autres.

Les programmes 2008 semblent proposer une progression des fractions vers les décimaux. Cela oblige à réfléchir sur les différentes introductions possibles des décimaux puis à défendre une option.

Dans cette réflexion, on doit intégrer les problèmes -d'ordre épistémologique- attachés à l'existence de ces **nouveaux** nombres.

On tient là le Mot-clef : nouveaux nombres. Pourquoi ces nouveaux nombres ? Propriétés de ces nouveaux nombres, en particulier en phase avec les nombres déjà maîtrisés et propriétés en rupture.

Puis on choisit un axe de présentation à l'école des décimaux, en indiquant clairement où l'on s'arrête avec les CM1 en prévision de l'année suivante.

Structure de l'exposé

1/ Éléments théoriques (peut-être plus conséquents que pour d'autres sujets) :

Rappels des éléments théoriques purement mathématiques

Problèmes mathématiques soulevés par l'invention de ces nouveaux nombres

Problèmes didactiques : représentation spontanée, théorèmes élèves erronés

2/ Idée de progression au CM1 :

1/ approche contextualisée des fractions, d’abord avec le partage d’une bande unité, puis dans le contexte de la droite graduée (comment trouver un moyen fiable pour rendre compte, à l’aide de nombres, de la position d’un point).

2/ Reprise et installation des fractions dans le cadre de mesures de longueurs ou d'aires.

3/ Simplification du modèle au profit des seules fractions a/10 ou b/100. Production d'écritures de type a + b/0 + c/100, repérage sur la droite numérique, addition, soustraction, comparaison.

4/ Irruption des écritures virgulaires, reprise des algorithmes additifs.

5/ Résolution de problèmes dans le champ additif usant de nombre décimaux, en particulier en lien avec la monnaie ou la mesure de longueurs.

6/ Le CM2 reprendra le chantier en poussant jusqu'au millième et en introduisant la multiplication et la division d’un nombre décimal par un nombre entier.