La notion d’aire au Cycle 3

Remarque a priori

La notion d'aire est traitée à partir du CM. Il n'est donc pas utile de se préoccuper du CE2.

Dans les programmes (du cycle 3)

3 - Grandeurs et mesures : […]

Les aires : comparaison de surfaces selon leurs aires, unités usuelles, conversions ; formule de l’aire d’un rectangle et d’un triangle.

Dans les progressions :

Au CM 1 : - Mesurer ou estimer l’aire d’une surface grâce à un pavage effectif à l’aide d’une surface de référence ou grâce à l’utilisation d’un réseau quadrillé. - Classer et ranger des surfaces selon leur aire.

Au CM 2 : - Calculer l’aire d’un carré, d’un rectangle, d’un triangle en utilisant la formule appropriée.
- Connaître et utiliser les unités d’aire usuelles (cm2, m2 et km2).

Éléments théoriques

1/ **Notion de mesure** : application de l'ensemble des zones fermées du plan vers R+ qui permet de traduire une qualité d'une classe d'objets. Exemples : la température, la longueur, la masse, etc. La mesure est un morphisme sur les relations (plus c'est chaud, plus la température est élevée, plus c'est lourd, plus la masse est grande). On doit pouvoir disposer au minimum d'étalons (au pluriel) pour comparer la qualité jaugée ou d'un système mécanique visualisant le phénomène (thermomètre, sonomètre, horloge, balance à ressort).

2/ **Grandeur repérable ou mesurable** : une grandeur est dite mesurable quand l'application qui lui est associée vérifie les propriétés d'additivité ($\Phi(\varnothing) = 0$, $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) + \Phi(B)$ ssi $A \cap B = \varnothing$.)
Exemples : mesure de longueur (et sa dérivée le périmètre),mesures des angles (pas au programme de l'école), mesure des aires ou des volumes.
Les grandeurs non mesurables sont dites repérables car on ne peut que se contenter de marquer (selon une échelle appropriée mais parfaitement arbitraire) une gradation de valeurs typiques de cette grandeur.
Exemples : mesure des températures, du bruit …

3/ **Propriétés des grandeurs mesurables** : comparaison immédiate et progressive (cas des longueurs) ou indirecte (appel à un objet de référence = une unité et obligatoirement par la suite à des sous-unités et sur-unités) ou analogique grâce à un dispositif mécanique (Cf. infra). On tombe dans le mesurage à condition d'avoir un ensemble de nombres supportant le raffinement de l'unité (rationnels ou décimaux).

3bis/ Pour préciser le point précédent, on doit présenter la notion de grandeurs quarrables. Pour notre sujet, il s'agit donc de **surfaces quarrables**, c'est à dire qui peuvent être découpées en une somme finie de surfaces facilement évaluables. En pratique, on ne garde que les surfaces dessinées sur un réseau à maille carrée (d'un sommet à son plus proche voisin, on circule sur une horizontale ou une verticale), la taille de cette maille étant adaptée au projet. De facto, on privilégie des unités de mesure stéréotypées : maille carrée de coté une unité de mesure linéaire standard (mm, cm, m, etc.). On étend cette notion à tout polygone dont les sommets sont des nœuds d'un quadrillage à maille métrique ou submétrique. Les mesures produites peuvent être fractionnaires, non décimales.

Un développement de la notion de surfaces quarrables consiste à **encadrer une surface à contour courbe** par deux polygones quarrables, au sens précédent.

On comprend, que selon la taille de la maille du quadrillage choisi, l'encadrement est plus ou moins précis. Ce travail d'encadrement, aussi fin que l'on veut (ce qui passe par un raffinement de la grille de dessin), de l'aire d'une surface courbe, par celles de deux polygones, l'un englobant, l'autre incrusté, peut être perçu comme une extension du travail sur les décimaux (encadrer des nombres par des D1, des D2, des D3, etc.).

4/ **Une dérivation consiste à installer un formulaire dans le cas de figures typiques** :

i) "construction" pour le rectangle quelconque et le carré (ce qui suppose la bonne compréhension de la multiplication sous l'angle des nombres en rectangle)

ii) "reconstruction" par chirurgie dans le cas du triangle (Rappel : c'est une nouveauté des programmes 2008)

iii) "par placage" dans le cas du cercle, si on décide d'aborder ce thème dans le cadre de la liaison CM2-6ième.

4bis/ **Une seconde dérivation** -pendante au point 4- consiste à **installer un système cohérent d'unités** usuelles de mesure de surfaces (merci 1789). Sa maîtrise passe par la fréquentation des problèmes classiques de conversion (penser à la difficulté pour les élèves de mémoriser le fait que 1 L = 1 000 cm^3).

4/ **Les difficultés prévisibles du concept** : les objets sur lesquels on travaille (zones 2D) ne se laissent pas facilement ranger d'un plus petit à un plus grand (il suffit que l'une n'englobe pas l'autre), d'ailleurs les enfants confondent surface et encombrement. Par ailleurs, les comparaisons indirectes entre 2 surfaces ne sont possibles que si ces deux surfaces se laissent facilement découper en surfaces *unités*. C'est pourquoi les élèves ne sont pas *conservant* des surfaces avant un âge avancé.

Une dernière difficulté provient de ce qu'il n'existe pas de machine simple d'emploi et permettant de mesurer une aire donnée, comme une règle ou un rapporteur. De telles machines existent, avec leurs limitations, ce sont les planimètres. Leur fonctionnement n'est d'ailleurs pas du tout illustratif de la notion d'aire et donc d'aucun secours pédagogique.

Pour un séquençage au CM 1

1/ Dégager la notion d'aire sans recours au nombre : on découpe divers exemplaires d'une même pièce en plusieurs parties superposables. Par recollement, on fait produire diverses formes ayant même aire.

2/ Classer diverses surfaces pour la notion d'aire.

3/ Irruption des surfaces quarrables et chirurgie sur les aires.

On choisit une forme simple et on arrive à paver la forme à mesurer quitte à la remembrer.

4/ Introduction concomitante de la notion d'additivité des mesures d'aire.

5/ Cas particulier des surfaces à contour polygonal tracées sur un quadrillage orthonormé. On n'introduit pas encore le cm2 ni les formules d'aire.

6/ Insertion dans le corpus : **relation au périmètre** (proposer diverses figures croissantes pour le périmètre et décroissantes pour l'aire par exemple, interpeler sur l'évolution du périmètre quand on double une surface).

Pour un séquençage au CM 2

1/ Reprise du travail de CM1 sur l'additivité des aires. Mesurer des aires de figures polygonales à l'aide d'un étalon non normalisé *u* et de fractions de cet étalon (suppose un travail préalable sur la notion de fraction ; ne peut s'y substituer).

On peut étendre ce travail au calcul d'aire sur des portions de disque ou des figures de type Yin-Yang ou Delaunay, à condition que l'étalon soit une portion de disque.

On peut profiter de cette phase pour faire travailler les élèves sur l'opposition aire-périmètre.

2/ Surgissement d'un étalon standardisé : le cm^2, le dm^2. Appropriation : on mesure des surfaces polygonales dessinées sur un quadrillage à maille carrée de 1 cm de coté. On vérifie qu'on dispose maintenant de deux moyens pour comparer des surfaces (quarrables) au point de vue de l'aire : par chirurgie (comparaison plus ou moins directe) et par évaluation propre de chacune puis comparaison des résultats de mesure.

3/ Formulaire pour le rectangle et le carré dans le cas de mesure entière en cm, puis extension en profitant des décimaux d'ordre 1. Le plus simple consiste à faire apparaître des figures polygonales sur du papier millimétré.

Extension : tableau de conversion des unités d'aire en lien avec le tableau de conversion des unités de longueur. Fondamental.

Nota : cette phase peut être repoussée après l'étape 4. Il est essentiel en effet que les décimaux soient bien maîtrisés jusqu'à l'ordre 2.

4/ Cas de l'aire du triangle

C'est peut-être cette section qui mériterait d'être développée en priorité lors de la passation du fait de sa nouveauté et du fait des difficultés que les élèves vont rencontrer.

A la limite, on peut défendre une stratégie de passation à l'oral qui passe par une présentation hypertrophiée de cette phase. C'est pourquoi je développe l'analyse ci-dessous.

L'aire d'un triangle est facilement accessible comme moitié de l'aire d'un rectangle construit sur la base du triangle : par un sommet, on mène la parallèle au coté opposé à ce sommet, puis l'on trace les perpendiculaires à ce coté passant par ses extrémités. On construit ainsi un rectangle, mais pour repérer que son aire est double de celle du triangle initial, il faut faire apparaître un nouvel objet géométrique, alias la hauteur issue du sommet isolé pour notre construction. Lorsque cette hauteur est tracée, on peut découper le rectangle en somme de deux rectangles, et le triangle comme somme de 2 triangles d'ailleurs rectangles; ce qui permet de repérer la multiplicité attendue.

Cette manip' suppose les connaissances suivantes :

* notion de perpendiculaire à une droite donnée issue d'un point donné ;
* notion de parallèle à une droite donnée passant par un point donné ;
* application (en acte) du formulaire de l'aire du rectangle ;
* intégration de la notion de hauteur du triangle et acceptation (en acte) de la formule de calcul de l'aire qui en découle.

Attention : 1/ ne pas présenter les triangles assis sur un côté … et 2/ ne pas propager l'idée qu'un triangle n'a qu'une seule hauteur. Cas spécifique des triangles pour lesquels une hauteur n'est pas à l'intérieur !

5/ Insertion de la notion dans le corpus : résolution de problèmes divers portant tant sur l'aire que le périmètre, avec tracés à l'échelle éventuels (problèmes de champs et de fils de fer, etc.).