

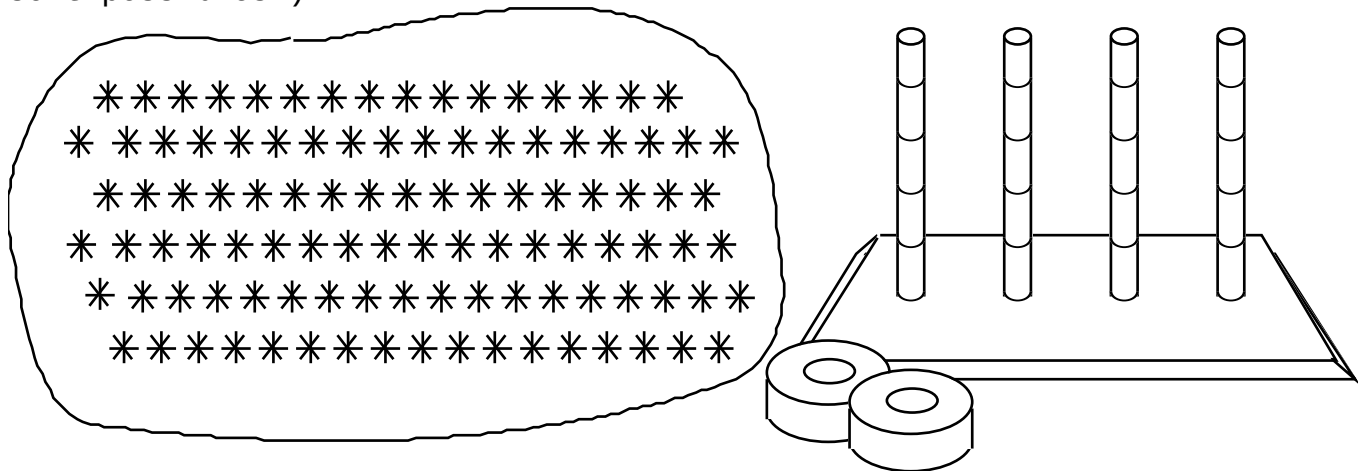
## Remise à niveau dans le domaine numérique

| Sujet :                                                  | N° de la planche : |
|----------------------------------------------------------|--------------------|
| Avant la numération de position .....                    | 1                  |
| Numération décimale .....                                | 2                  |
| Questions de bases... ..                                 | 2                  |
| Nombres et facteurs Premiers.....                        | 3                  |
| Autour de la division euclidienne.....                   | 4                  |
| Critères de divisibilité .....                           | 4                  |
| Diviseurs communs et PGCD.....                           | 5                  |
| Multiples communs et PPCM.....                           | 5                  |
| PGCD et PPCM .....                                       | 6                  |
| Calculs simples.....                                     | 7                  |
| Puissances positives d'un nombre.....                    | 7                  |
| Quotients zé fractions.....                              | 7                  |
| Puissances négatives d'un nombre .....                   | 7                  |
| Fractions décimales et nombres à virgule .....           | 8                  |
| Représentations décimales finies ou illimitées.....      | 9                  |
| Arrondis et troncatures.....                             | 10                 |
| Inégalités et encadrements.....                          | 11                 |
| Equations .....                                          | 12                 |
| Equation se ramenant au premier ordre.....               | 13                 |
| Système de deux équations du premier ordre .....         | 13                 |
| Savoir mettre en équation .....                          | 13                 |
| Inéquation à un seul terme du premier ordre .....        | 14                 |
| Inéquations à deux termes du premier ordre.....          | 14                 |
| Graphiques ... ..                                        | 15                 |
| Applications affines et représentations de droites ..... | 16                 |
| Applications affines par morceaux.....                   | 16                 |
| Proportionnalité (numérique).....                        | 17                 |
| Vitesses et débits .....                                 | 17                 |
| Pourcentages.....                                        | 17                 |

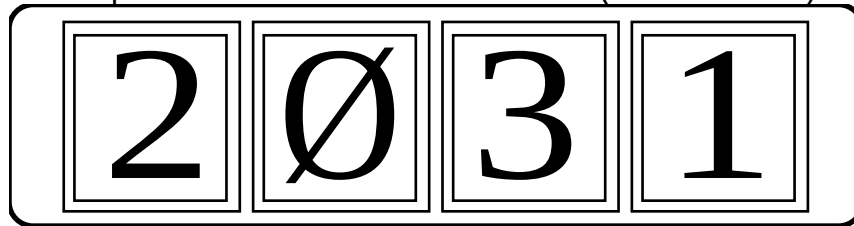


## Avant la numération de position

1/ Vous disposez d'un abaque à 4 tiges. Sur chacune de ces tiges, vous pouvez enfiler au plus 5 perles. Ceci vous permet de *compter* le nombre d'éléments dans la collection représentée ci-dessous. Qu'indiquera l'abaque en fin d'opération ? (Attention : 2 règles sont possibles.)



2/ Vous disposez d'un compteur à 4 roulettes. Sur chaque roulette, vous trouvez les symboles 0, 1, 2, 3. Vous en servant pour décomposer une collection, vous trouvez le résultat ci-dessous. Combien votre collection possède-t-elle d'éléments (en base 10)?



3/ On propose à une classe de travailler avec des jetons. Au début, chaque enfant reçoit un certain nombre de jetons blancs. Il peut alors procéder à des échanges selon la règle :

- 4 jetons blancs s'échangent contre 1 jeton jaune ;
- 4 jetons jaunes s'échangent contre 1 jeton vert ;
- 4 jetons verts s'échangent contre 1 jeton bleu.

◇ Paul se présente à la fin de son travail avec 7 jetons blancs et 2 jetons verts, et Marie avec 3 jetons blancs et 6 jetons verts ; Lucien affiche enfin 2 jetons blancs, 1 jeton vert et 2 jetons bleus. Que penser des travaux de ces trois enfants ?

◇ Partant de 44 jetons blancs, quels jetons obtiendrait-on selon les consignes précédentes ?

◇ Partant d'une collection de jetons blancs, on obtient au bout du processus 1 jeton blanc, 2 jetons verts et jaunes et 1 jeton bleu. Combien y-avait-il de jetons blancs au départ ?

4/ Une ronde vaut deux blanches, une blanche deux noires et une noire vaut deux croches. On prend la croche comme unité. Traduire dans ce système de notation les valeurs : neuf, six, quatorze. Tient-on une numération de position ?

## Numération décimale

5/ Ecrire en chiffres : un milliard quatre vingt mille.

6/ Ecrire en lettres le prédécesseur de  $10^8$ .

7/ Existe-t-il des nombres dont le chiffre des centaines est 2 et dont le nombre de dizaines est 31 ?

8/ Combien de fois le chiffre 3 est-il imprimé au bas des pages d'un livre, si ce livre a 300 pages numérotées à partir de 1 ?

9/ Combien de chiffres 5 pour écrire les nombres de 1 à 99 ?

## Questions de bases...

10/ Ecrire en base 9 puis en base 99 le nombre qui s'écrit 9999 dans notre bonne vieille base 10.

11/ Ecrire en base 2 le nombre qui s'écrit 22 en base 10. Convertir 333 en base 3, 4444 en base 4, et ainsi de suite...

12/ Traduire en base 7 l'entier qui s'écrit 3772 dans notre base 10. Puis traduire dans la base 12 : on prendra l'alphabet  $\{ \emptyset \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ \alpha \ \beta \}$ .

13/ Avec trois chiffres  $a, b, c$ , je peux écrire un nombre  $abc$  en base 7 ou  $cba$  en base 11 ; mieux, ces deux nombres sont égaux !  
Trouvez ces trois chiffres  $a, b, c$ .

14/ Dans une certaine base a le produit  $21 \times 14 = 324$  est correct. Quelle est cette base ? Même question pour le produit  $12 \times 23 = 276$ .

15/ Effectuez les opérations suivantes dans les bases demandées:

$$\left( \begin{array}{r} \text{base } 5 \\ 3421 \quad 431 \quad 213 \\ + \quad 230 \quad - \quad 132 \quad \times \quad 14 \end{array} \right) \left( \begin{array}{r} \text{base } 12 \\ 39\beta 7 \quad \beta\beta\beta \quad 27 \\ + \quad 213 \quad - \quad 123 \quad - \quad 41 \end{array} \right) \left( \begin{array}{r} \text{base } 2 \\ 1001 \quad 10101 \quad 111 \\ + \quad 11011 \quad - \quad 1111 \quad \times \quad 11 \end{array} \right)$$

16/ Voici une rapide description du système sumérien (3000 av JC):

The diagram illustrates the construction of the 10x60 grid. It shows a sequence of components: a single 'D' shape (1), a circle (10), a semi-circle (60), a semi-circle with an inscribed circle (600), a large circle (3600), and a large circle with an inscribed circle (36 000). These are then combined into a 10x60 grid (10x60), which is further divided into a 60x60 grid (60x60) and a 10x3600 grid (10x3600). The final result is a large grid (4912) composed of many small 'D' shapes and circles.

Ecrivez dans ce système les nombres 5418 et 292. Calculez leur somme directement dans ce système puis transcédez en base 10 pour vérification... Inversement, calculez directement et traduisez :

$$\bigcirc \bigcirc - \left( \begin{array}{c} \text{four semi-circles} \\ \text{plus one circle} \\ \text{plus three semi-circles} \end{array} \right) = ?$$

## Nombres et facteurs Premiers

Rappel :  $\infty$  un nombre est déclaré premier si et seulement si ce nombre n'est divisible que par 1 et par lui-même.  
• tout nombre entier peut être exprimé comme produit fini de nombres premiers ; et cette décomposition est unique.

17/ Décomposez en produit de nombres premiers les nombres indiqués ci-dessous (utilisez la calculatrice, mais avec économie) :

|      |      |      |       |       |       |
|------|------|------|-------|-------|-------|
| 753  | 856  | 990  | 2184  | 3150  | 3960  |
| 3064 | 5145 | 6018 | 16335 | 34521 | 56805 |

Question annexe : pourquoi est-il inutile de chercher des diviseurs premiers supérieurs à la racine carrée de chacun des nombres à décomposer ?

18/ On prend un nombre  $n$  quelconque ; on le divise par 111 ; quel est son reste ? Maintenant, on le multiplie par 1000, puis on le divise par 111 ; quel reste obtient-on ? Essayez avec plusieurs valeurs pour  $n$  avant de généraliser. En déduire que les nombres 111 111, 100 010 001, 10 000 100 001 sont tous divisibles par 111. Etablissez enfin leurs décompositions respectives en produit de facteurs premiers.

19/ On considère le produit  $P=2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$ . Décomposition en facteurs premiers? On considère les 16 nombres entiers  $P+2$ ,  $P+3$ ,  $P+4$ ,  $P+5$ ,  $P+6$ , ...,  $P+15$ ,  $P+16$ ,  $P+17$ . Montrez qu'aucun d'eux n'est un nombre premier. On veut trouver 35 nombres consécutifs qui ne soient pas premiers. En quoi le nombre  $P'=2 \times 3 \times 5 \times \dots \times 31 \times 37$  permet-il d'exhiber ces nombres cherchés ? Généralisation ?

20/ On considère la relation  $x^2 - y^2 = n$  ❶. Sous quelle autre forme peut-on présenter cette équation en  $x$  et  $y$  ?

a) On suppose que  $n$  est impair. Soient  $p$  et  $q$  2 entiers tels que  $p \cdot q = n$ . Pourquoi  $p$  et  $q$  sont-ils obligatoirement impairs ? Si on prend  $n=255$ , donnez des couples  $(p,q)$  correspondant. Vérifiez que les entiers  $(p+q)/2$  et  $(p-q)/2$  satisfont la relation ❶. Dans le cas  $n=255$ , trouvez toutes les solutions en  $(x,y)$ .

b) On suppose maintenant que  $n$  est pair. En s'appuyant sur le fait (à démontrer si vous le voulez) que les seules solutions en  $(x,y)$  sont encore de la forme  $(p+q)/2$  et  $(p-q)/2$ , montrez que la relation ❶ est sans solution si le nombre  $n$  n'est pas un multiple de 4. Donner toutes les solutions pour  $n = 360$ .

21/ La devinette est la suivante : "je prends un nombre ; je lui ajoute son carré ; je lui ajoute encore 1 ; mon tout est un multiple de 13 ; qui suis-je ?"

a) Ecrire l'équation associée à la devinette, soit ❷. Vérifiez que la devinette s'applique à 3 et à 9.

b) Dans la division par 13 on peut écrire  $n=13 \cdot q + r$  ( $r < 13$ ). Transformez l'équation en  $n$  ❷ en une équation en  $r$ , soit ❸. Vérifiez que cette équation ❸ n'admet pour seules solutions que  $r=3$  et  $r=9$ . Conclure que la solution générale est de la forme :

$$n = 3 + 13 \cdot \lambda \quad \text{ou bien} \quad n = 9 + 13 \cdot \lambda.$$

## Autour de la division euclidienne

22/ Quel est le plus petit nombre entier positif obtenu en ôtant successivement 19 à 4937,  $4937-19=4918$ , etc...

23/ Dans une division de reste nul, le diviseur est le quart du dividende ; Quotient ? Que devient le quotient quand diviseur et dividende sont multipliés par un même facteur ? Et que devient le quotient quand seul le dividende est multiplié par un facteur ?

24/ Dans la division par 5, un nombre A donne un reste de 3.

a) On multiplie A par 14 : reste dans la division par 5.

b) On multiplie A par un entier m supérieur à 1. Donnez un procédé permettant de calculer le reste dans la division par 5 du nombre ainsi obtenu. Appliquez ce procédé aux cas où  $m=328$  puis  $m=5^{36}+2$ .

c) Complétez le tableau suivant :

| DVD: | A | 2A | 3A | 4A | 5A | 6A | 7A | 8A | 9A | 10A | 11A | 12A | 13A |
|------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| R5 : | 3 |    |    |    |    |    |    |    |    |     |     |     |     |

{la ligne R5 retient le reste du dividende DVD dans la division par 5}

d) D'une manière générale, connaissant le reste dans la division par 5 de  $A_m$ , quel sera le reste de  $A.(m+1)$  ? Loi générale.

[D'après Nantes 92]

25/ Déterminez le dividende et le diviseur d'une division sachant que :

a) le quotient est 82 ou le diviseur est 82

b) le reste est 47

c) le dividende est écrit avec 3 chiffres, dont 2 sont égaux.

26/ Trouvez tous les naturels s'écrivant avec 3 chiffres et qui, divisés par le nombre 37 donnent un quotient égal au reste.

## Critères de divisibilité

27/ Décomposez 111 111 en produit de facteurs premiers. En déduire que 888 888 est divisible par 37.

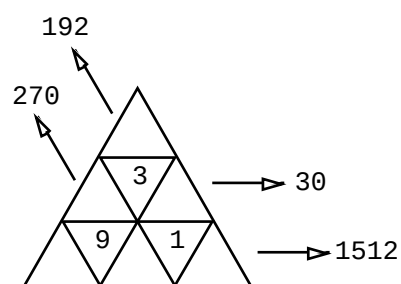
28/ Un nombre s'écrit  $1xxy$  en base 10. Déterminez x et y pour que ce nombre soit divisible par 5 et par 9.

29/ Un nombre s'écrit  $37a28b$ . Trouvez a et b afin que ce nombre soit divisible par 6 et par 45.

30/ Chiffre des unités de  $3548^{28}$  ?

40/ On doit ranger 1001 petits cubes de 2 cm d'arête. Pourquoi une boîte de 14 par 22 par 26 cm convient-elle parfaitement ?

41/ Remplir les cases de ce triangle à l'aide des entiers de 1 à 9, utilisés chacun une fois. Pour chaque flèche, on donne le produit des 3 ou 5 nombres situés dans la rangée correspondante.



## Diviseurs communs et PGCD

42/ Quels sont tous les diviseurs du nombre 10101 ? Quels sont tous les diviseurs du nombre 111111 ? Quels sont les diviseurs communs à ces deux nombres ? Quel est le plus grand diviseur commun à ces deux nombres ?

43/ PGCD des couples d'entiers : (91,56) ; (286,121) ; (13,119) ?

44/ Les entiers 13 et 119 sont dits premiers entre eux ; mais point les nombres 286 et 121. Quelle est la règle ?

45/ Deux nombres entiers premiers sont-ils premiers entre eux ? Quand on *tient* deux entiers premiers entre eux, l'un d'eux est-il un nombre premier ?

46/ Devinette idiote : le PGCD de deux nombres est égal à l'un d'eux ; que peut-on dire de l'autre nombre ? Donnez des exemples.

47/ Pour chacun des trois couples (A,B) énoncés en 43/, trouvez deux entiers relatifs u et v tels que :

$$u.A + v.B = \text{PGCD}(A,B) \text{ \{relation dite de Bezout\}}$$

Au fait : quel est le PGCD du couple d'entiers ( $|u|, |v|$ ) ainsi trouvés ? On rappelle que l'expression  $|x|$  désigne la valeur absolue du nombre x. Les points 48/ et 49/ ci-dessous tournent autour de cette relation de Bezout.

48/ On dispose de pièces de 2 F et de 5 F. Le commerçant rend sa monnaie avec le même type de pièces. Précisez les tractations pour l'achat d'un article coûtant respectivement 56 F, 73 F, 99 F .

49/ J'ai déposé à ma banque un chèque de X francs et Y centimes. Le caissier s'est trompé et m'a versé Y francs et X centimes. Je n'ai rien dit parce que j'ai touché 5 centimes de plus que le double de la somme libellée. Valeur réelle de mon chèque ?

50/ Décomposez en produit de facteurs premiers les nombres 286 et 121 ainsi que leur PGCD. Constat ? Règle pratique d'obtention ?

## Multiples communs et PPCM

51/ Calculez les 25 premiers multiples du nombre 42. Évaluez de même les 25 premiers multiples de 72. Quels sont les nombres communs aux deux listes ? Quel est le plus petit multiple commun à ces deux nombres (PPCM) ? De quoi serait constituée la liste des multiples communs aux deux nombres 42 et 72 ?

52/ Décomposez en produits de facteurs premiers les nombres 42 et 72 puis leur PPCM. Constatation ? Règle pratique d'obtention ?

53/ Quel est le plus petit entier divisible par 2, par 5, par 6 ? Quel est le plus petit entier qui fournit le même reste lorsqu'on le divise par 11 et par 9 ?

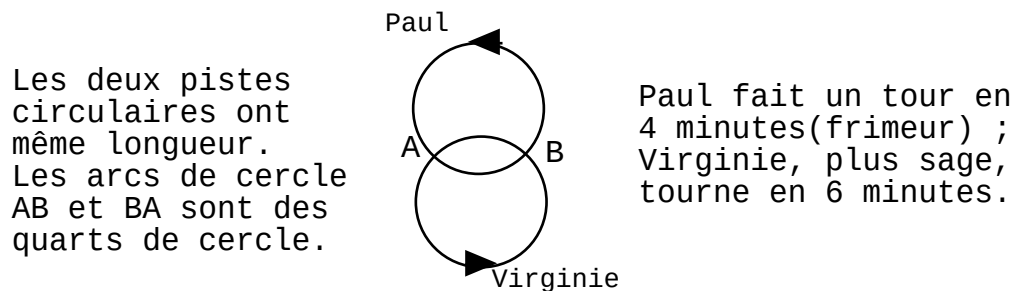
54/ L'un comptine ainsi : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 2 et ainsi de suite. L'autre comptine comme cela : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 etc. Avez-vous vu la différence ? Les deux débutent au même moment. Quand prononceront-ils à nouveau le même chiffre ?

## Multiples communs et PPCM (suite)

55/ Variante : On dispose de deux compteurs à  $p$  roulettes. Le premier est en base  $a$ , le second est en base  $b$ . On les fait tourner de façon synchrone. Au bout de combien de tops, marqueront-ils à nouveau zéro ensemble ?

56/ Variante : Deux horloges ne sont pas bien synchronisées. La première fait entendre un top toutes les minutes. La seconde s'exclame toutes les 62 secondes. On les met en marche à midi pile. Au bout de combien de temps délivreront-elles leur top en même temps ? Un peu plus tard, la deuxième horloge fait entendre son top 16 secondes après la première. Quelle heure est-il ?

57/ Variante : Paul et Virginie trottent allègrement sur deux pistes circulaires comme ceci :



Sachant que Paul et Virginie partent ensemble de A à midi, quand se recroiseront-ils à nouveau, et en quel point ?

## PGCD et PPCM

58/ Calculez successivement :  
le produit des deux nombres 3584 et 768 ;  
le PGCD des deux nombres 3584 et 768 ;  
le PPCM des deux nombres 3584 et 768 ;  
le produit de ce PGCD par ce PPCM.

Que constatez-vous ? Loi générale ?

59/ On se donne un rectangle quadrillé de  $x$  colonnes et  $y$  lignes ; on part d'un coin, en diagonale ; on rebondit sur les cotés jusqu'à arriver dans un coin par où s'échapper.

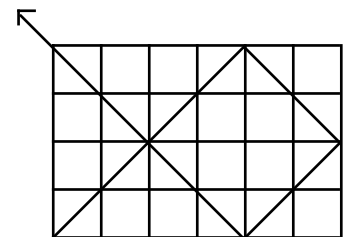


schéma réalisé avec  $x = 6$  et  $y = 4$

Voici les questions : Dans quels cas (pour quelles valeurs de  $x$  et  $y$ ) passe-t-on par toutes les cases ? Si toutes les cases ne sont pas traversées, sur combien d'entre elles passe-t-on ?



### Calculs simples

61/  $A = 4,7 - (0,3 - 3,2) + 1,7 - (7,2 + 0,8)$

62/  $B = 27 - [24 - (4,5 - 3,8)] + (23 - 45)$

63/  $C = -70 + 6(7 - 4 \times 5) + (45,3 - 5,9)(2,8 - 1,4)$

64/  $D = 4 - (7 - 6 \times 2)[2 - (4 - 2 \times 3)(-9 + 2 \times 7)]$

### Puissances positives d'un nombre

65/  $E = 3^3 + 2^3 - 3^2 - 2^2$

66/  $F = (2^2 + 5^2)^2$

67/  $G = 2^4(2^2 * 2^3)^2$

### Quotients zé fractions

68/ Simplifier puis évaluer:

$$H1 = \frac{312}{216} \quad H2 = \frac{72}{252} \quad H3 = \frac{1323}{693} \quad H4 = \frac{729}{1701} \quad H5 = \frac{1064}{672}$$

69/ Réduire puis évaluer:

$$I1 = \frac{55}{132} + \frac{35}{90} - \frac{66}{36} \quad I2 = \frac{56}{48} + \frac{21}{28} + \frac{52}{117} \quad I3 = \frac{6,25}{7,5} + \frac{3,6}{9,6}$$

70/ Simplifier puis évaluer:

$$J1 = \frac{60 \times 35}{75 \times 18} \quad J2 = \frac{81}{125} \times \frac{15}{55} \times \frac{165}{27} \quad J3 = \frac{15}{27} : \frac{35}{36}$$

71/ Synthèse alias débrouillez-vous:

$$K1 = \left( \frac{720}{1080} + \frac{2,85}{-1,35} \right) \times \left( 4 - \frac{1}{4} + \frac{7}{12} \right) \times \left( 3 - \frac{9}{13} \right)$$

### Puissances négatives d'un nombre

72/ Mettre sous forme décimale:

$$L1 = \frac{2^3 \times 7^{-3}}{3^2 \times 2^5} + \frac{3^2 \times 5^{-2}}{4^3 \times 2^{-5}} \quad L2 = \frac{7 \times 5 \times 3^2}{2^3} - 6^{-1} \times 5^3$$

73/ Ecrire sous la forme  $a \cdot 10^n$ , a nombre entier, les nombres suivants:

$$M1 = 427,32 ; \quad M2 = -0,32 ; \quad M3 = 45,03 ; \quad M4 = 7,28 ;$$

$$M5 = 357,01 ; \quad M6 = 0,042 ; \quad M7 = 0,00972 ;$$

$$M8 = 25,7 \times 10^{-3} ; \quad M9 = 34200 \times 10^{-3} ; \quad M10 = 0,042 \times 10^5 ;$$

$$M11 = \frac{57 \times 17 \times 10^{-2}}{6,8 \times 10^{-1} \times 2 \times 10^2}$$



## Représentations décimales finies ou illimitées

83/ Déterminez la représentation décimale des fractions :

5/9    6/9    7/9    8/9    et plus généralement de la forme  $a/9$ .

84/ Déterminez la représentation décimale des fractions :

4/11    5/11    6/11    7/11    et plus généralement de la forme  $a/11$ .

85/ Même question avec les fractions de la forme  $a/17$ .

86/ Parmi tous ces nombres, cerclez ceux qui sont des décimaux, puis donnez leur représentation décimale :

5/160    17/675    21/150    97/200    176/450    4343/3232    1960/520

87/ Trouvez la valeur du chiffre  $u$  pour que la fraction  $17u/6$  soit en fait décimale. Même devinette avec  $1\cancel{u}11/105$  (on cherche  $\cancel{u}$  ici).

88/ Ordonnez par valeurs croissantes, en essayant de vous dispenser au maximum de la calculette :

$\pi$     22/7    333/106    355/113    13/4    16/5    19/6    179/57    311/99

89/ Complétez sans calculette :

| Calcul proposé : | Résultats possibles : |       |       |       | Résultat définitif : |
|------------------|-----------------------|-------|-------|-------|----------------------|
| 3-12/15          | 63/15                 | -9/15 | 9/15  | 35/15 |                      |
| 12/7-7/8         | 5/2                   | -5/2  | 43/56 | 52/56 |                      |

90/ La fraction  $342/11$  est-elle décimale ? Quel est le 75<sup>ième</sup> chiffre après la virgule ? le 76<sup>ième</sup> ?

91/ La fraction  $30/14$  est-elle décimale ? 25<sup>ième</sup> chiffre après la virgule ? 63<sup>ième</sup> ? 102<sup>ième</sup> ? Finalement, développement décimal ?

92/ Voici un développement décimal illimité périodique :

0,142 857 142 857 142 857 ..... etc.

Remettez-le sous forme de fraction.

93/ Périodes de  $53/99$ ,  $365/999$ ,  $1789/9999$ ,  $86400/99999$  ? Pour répondre à cette question, vous avez peut-être intérêt à chercher les périodes des fractions  $1/99$ ,  $1/999$ ,  $1/9999$ , etc.

94/ Remettez sous forme de fractions les suites décimales périodiques : 0,27272727...    0,321321...    0,5323232...    7,464646...

95/ Voici un nombre étrange (on l'appelle  $x$ ) :

$x = 0,1020030004000050000060000007000000080000000900000000010 \dots$  [... signifie "et ainsi de suite"]

Nature de ce nombre : décimal, rationnel, irrationnel ? Calculez les valeurs respectives des nombres :  $x+1$ ,  $1-x$ ,  $2x$ . Est-ce facile ?

## Arrondis et troncatures

Δ A la calculatrice, calculez :  $43,41 \div 2,5$  ; soit a le résultat affiché. Puis, calculez  $25 \div 9$  ; soit b le résultat affiché. Peut-on affirmer que :  $a = 43,41 \div 2,5$  ,  $b = 25 \div 9$  ? Commentez.

Δ Je dis que 17,36 est une troncature de  $43,41 \div 2,5$  à  $10^{-2}$  près ou au centième. Donnez une troncature de  $25 \div 9$  au dixième, au centième, au millièm, et ainsi de suite !

Δ Je dis que l'arrondi de  $25 \div 9$  au centième est 2,78 tandis que celui de  $43,41 \div 2,5$  est 17,36. Donnez une définition de cette notion d'arrondi.

96/ Donner la troncature et l'arrondi au dixième des nombres suivants :  $27 \div 7$  ;  $7 \div 12$  ;  $9,13^3$  ;  $87 \div 31$  ;  $17505/2505$

97/ Donner la troncature et l'arrondi au centième des nombres suivants :  $0,47/3,9$  ;  $0,007 \div 0,079$  ;  $1793 \div 1993$  ;  $0,412 \times 7,28^3$

98/ Drongadure zé arronti zo billième tes nombres a, b, a+b, ab,  $a^2$ ,  $b^2$ , 25a, 32b, zajant gue  $a=9/7$  et  $b=7,12^{1/2}$ .

99/ Pour chaque couple de nombres a et b fournis ci-dessous, calculez à la calculatrice la différence a-b ; indiquez alors le nombre le plus petit a ou b :

$$a = 85/27 \text{ et } b = 116/37 \quad \diamond\diamond\diamond a = -102/14 \text{ et } b = -503/69$$

$$a = 1018/37 \text{ et } b = 2449/89 \quad \diamond\diamond\diamond a = -116/27 \text{ et } b = -150/35$$

**100/** Quels sont les nombres qui sont égaux à leur troncature au dixième, à leur arrondi au centième ? Peut-on les visualiser sur un dessin ?

101/ Soit  $\underline{x}$  un nombre et  $\underline{a}$  son arrondi au centième. J'élève  $\underline{x}$  au carré... Puis-je prédire son arrondi au centième d'après  $\underline{a}$  ? Donnez des exemples en vue d'un mode d'emploi général. Et si j'avais cherché l'arrondi de  $\underline{x}^2$  au millièm ? Ou bien élevé  $\underline{x}$  au cube ? Ou au contraire cherché la racine carré de  $\underline{x}$  ?

102/ On appelle partie entière d'un nombre x le seul entier n qui vérifie  $n \leq x < n+1$ . Ainsi -2 est la partie entière de  $-116/27$  et 28 est celle de  $1575/56$ .

↪ Piochez dans les nombres ci-dessus et recherchez leurs parties entières. Relation entre partie entière et troncature ou arrondi, au dixième, au centième, etc. (c'est à dire, exprimez ces troncatures à l'aide de parties entières).

## Inégalités et encadrements

•• Soit  $x = 25 \div 9$  ; Alors  $2,77 < x < 2,78$ . 2,77 est une valeur approchée par défaut de  $x$  ; 2,78 est une valeur approchée par excès de  $x$ . Comme  $2,78 - 2,77 = 0,01$  on appelle la double inégalité ci-dessus un encadrement d'amplitude 0,01.

103/ Ecrire la troncature au dixième des nombres ci-dessous ; en déduire des encadrements d'amplitude  $10^{-1}$  :

$$13,568 \quad 285,23 \quad 4/53 \quad 12^{1/2}$$

104/ Ecrire l'arrondi au centième des nombres ci-dessous ; en déduire des encadrements {là aussi} d'amplitude  $10^{-1}$  :

$$0,0458 \quad 2589,4859 \quad 9,057 \times 1,9$$

•• Si on donne une troncature d'un nombre, mais sans connaître ce nombre, on en déduit facilement un encadrement. Ainsi dire que 4,12 est une troncature au centième de  $\sqrt{17}$  permet d'écrire aussitôt  $4,12 < \sqrt{17} < 4,13$ .

•• Mais si on donne un arrondi d'un nombre, l'encadrement devra se faire de part et d'autre de cet arrondi. Ainsi 4,36 est un arrondi au centième de  $\sqrt{19}$ ; on ne sait pas s'il s'agit d'un arrondi par défaut ou par excès. En revanche on peut affirmer que la double inégalité  $4,355 < \sqrt{19} < 4,365$  est un encadrement au centième.

105/ 3,316 est une troncature au millièm de  $\sqrt{11}$ . En déduire des encadrements pour les expressions suivantes :

$$22 \times \sqrt{11} \quad 0,15 \times \sqrt{11} \quad \sqrt{11} \div 33 \quad \sqrt{11} \div 802$$

106/ 2,64 est un arrondi au centième de  $\sqrt{7}$ . En déduire des encadrements pour les expressions suivantes :

$$20,8 \times \sqrt{7} \quad 100,84 \times \sqrt{7} \quad \sqrt{7} \div 0,025 \quad \sqrt{7} \div 1,21$$

107/ Le volume d'une citerne cylindrique à base circulaire est :

$$V = \pi R^2 h, \text{ où } R \text{ désigne le rayon de la base et } h \text{ la hauteur du cylindre.}$$

On prend  $R=2,15$  m,  $h=15,28$  m. Sachant que 3,142 est l'arrondi au millièm de  $\pi$ , calculez en  $m^3$  le volume de cette citerne. Donnez un encadrement du volume. Exhibez l'arrondi le plus précis possible.

Questions subsidiaires : volume en litres ? Que devient le problème si l'on prend 3,14 comme troncature au centième de  $\pi$  ?

## Equations

•• On appelle équation du premier degré, toute écriture  $A(x)=B(x)$  pouvant se mettre sous la forme  $ax=b$ . Sauf cas pathologique, une équation du premier degré admet une et une seule solution.

108/ Parmi les équations ci-dessous, repérez celles qui sont du premier degré :

$$3-2(4+x) = 13+3[7+3(4x+2)] \quad 3x \cdot [7-(3-12x)] = (6x-23)^2$$
$$5,7x+3[7-0,3(14+25x)] = 0 \quad (3x-1)(x-3)+2x = x^2-9$$

109/ Parmi les équations du n° 108/ résolvez celles qui sont du premier degré.

•• Equation au service de la résolution de problème. Parfois il est plus facile de *poser une équation*. La démarche est toujours la même : décryptage de l'énoncé, repérage du nombre et du type d'inconnue(s), mise en équation, résolution.

110/ R, U, P ont à se partager 150 suffrages ; R en a 35 de plus que U qui en a trois fois moins que P. Résultats ?

**111/** Trouver le nombre dont le septième plus le neuvième vaut 100 de moins que le tiers...

112/ La longueur d'un rectangle vaut trois fois sa largeur ; quand on rajoute 15 m à sa longueur et à sa largeur, son aire augmente de 2625 m<sup>2</sup>. Longueur et largeur initiales ?

113/ Si on ajoute 8 m aux cotés d'un carré, sa surface augmente de 704 m<sup>2</sup>. Cotes initiales ?

114/ Que pensez-vous de ce problème : Combien faut-il ajouter au coté d'un carré de 17 m pour que sa superficie croisse de 111 m<sup>2</sup> ?

**115/ Hommage à A. Deledicq**

Une fois : 18 personnes mangent ensemble au restaurant. Prix du repas : 72 F ttc. Mais 4 personnes ont oublié leur portefeuille. Combien les autres doivent-ils payer en plus ?

Une autre fois : Là encore, 18 personnes au restaurant dont 4 étourdis. Les 14 autres payent 12 F en plus. Prix du repas ?

Variante : Menu à 72 ttc ; 4 étourdis ; les autres payent 8 F en plus ; Combien de convives qui payent ?

Variante encore : 18 convives STOP Menu à 50 F HT STOP les pas étourdis doivent payer 10 F HT en plus STOP Question STOP Combien d'étourdis STOP STOP

116/ La somme de x naturels consécutifs est 120. Quels sont ces naturels selon que  $x = 3$  ou  $x = 5$  ?

## Equation se ramenant au premier ordre

117/ Résoudre chacune des équations ci-dessous en se ramenant à une ou plusieurs équations du premier ordre :

- i)  $7(x-8)+3(2x+1) = x+2$
- ii)  $x^2 + 2x + 1 + (x+1)(x-2) = 0$
- iii)  $\frac{18x - 30}{3x - 5} = 7$
- iv)  $\sqrt{4 - 2x} = 3$
- v)  $|3x - 2| = 7x - 21$
- vi)  $|3x + 6| = |x - 4|$

## Système de deux équations du premier ordre

118/ Résoudre chacun des systèmes proposés ci-dessous :

$$\begin{array}{l} / 2x + 3y = 5 \\ \backslash 6x - 4y = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} / 12x - 3y = 5 \\ \backslash 18x - 4y = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} / 2x - 3y - 15 = 0 \\ \backslash -4x + 6y + 30 = 0 \end{array}$$

119/ Même question mais en se ramenant au premier ordre :

$$\begin{array}{l} / \sqrt{2x} + 2\sqrt{y} + 1 = 0 \\ \backslash \sqrt{7x} + \sqrt{14y} + 2 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} / |x - 1| + |y - 2| = 3 \\ \backslash |x + 1| + |y + 2| = 7 \end{array}$$

## Savoir mettre en équation

120/ Sur cent électeurs, U a 24 voix de plus que R. Résultats ?

121/ Histoire bientôt ancienne :

- "Donnez-moi 2 pains et une baguette " dit Jean au boulanger et il paye 14,40 F.
  - "Oh pardon, c'était 2 baguettes et un pain" et le boulanger lui rend 2 Francs en échange d'une pièce de 20 centimes.
- Prix du pain ? Question annexe : date de quand, l'histoire ?

122/ Histoire de Toto :

- Toto : "Si tu m'en donnes un, j'en aurais autant que toi".  
Pastoto : "Mais si tu m'en donnes un, j'en aurais deux fois plus que toi..."  
Alors ?

123/ Histoire sûrement du temps jadis :

- Un pain au chocolat et une brioche s'il vous plaît madame.
- Oui Monsieur, ça vous fera 3 Francs ...
- Alors plutôt un pain au chocolat et un croissant.
- Comme vous voulez, ça fait 2 Francs 80 ...
- Bon ben j'avais prendre un croissant et une brioche.
- En ce cas, 2 Francs 40!
- Désespéré : Mais alors, qu'est-ce que je vais pouvoir acheter avec mes 1 Franc 30?

## Inéquation à un seul terme du premier ordre

124/ Représentez sur la droite numérique les ensembles de nombres suivants :

$$A = [-1;3[ \quad B = [4;9/2] \quad C = [7;+\infty[ \quad D = ]-\infty;2]$$

125/ Représentez sur la droite numérique les ensembles de nombres suivants :

$$E = \{x/ -2 < x < 4\} \quad F = \{x/ x^2 < 9\} \quad G = \{x/ |x - 3| < 1\}$$

126/ Résolvez les inéquations suivantes :

$$(h) \quad 2x - 3 > 0 \quad (i) \quad -2x + 1 < 5 \quad (j) \quad |3x - 2| \geq |x + 1|$$

## Inéquations à deux termes du premier ordre

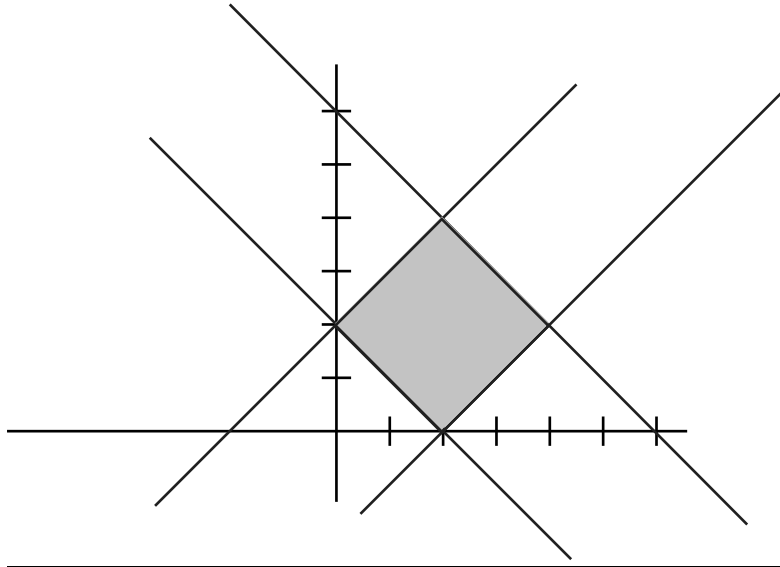
127/ On travaille dans le plan rapporté à un repère  $xOy$ . A chaque point de coordonnées  $(x,y)$ , on associe le poids  $P$  selon la formule  $(x,y) \rightarrow P(x,y) = 2x - y + 1$ .

On décide de marquer en rouge les points dont le poids est négatif, en vert ceux dont le poids est positif, en noir ceux dont le poids est nul. A vous de faire apparaître ce sublime coloriage...

128/ Dans le plan muni d'un repère  $xOy$ , visualisez la solution des systèmes successifs :

$$\begin{aligned} (k) \quad & 2x + 3y - 1 < 0 \quad \text{et} \quad x - y > 1 \\ (l) \quad & x - 2 \geq 0 \quad \text{et} \quad y - 3 \leq 5 \\ (m) \quad & (2x - y + 1)(x - y - 1) > 0 \\ (n) \quad & |2x - y + 1| < 5 \quad \text{et} \quad x^2 - y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

129/ Donnez un système d'inéquations rendant compte de la région hachurée ci-dessous :

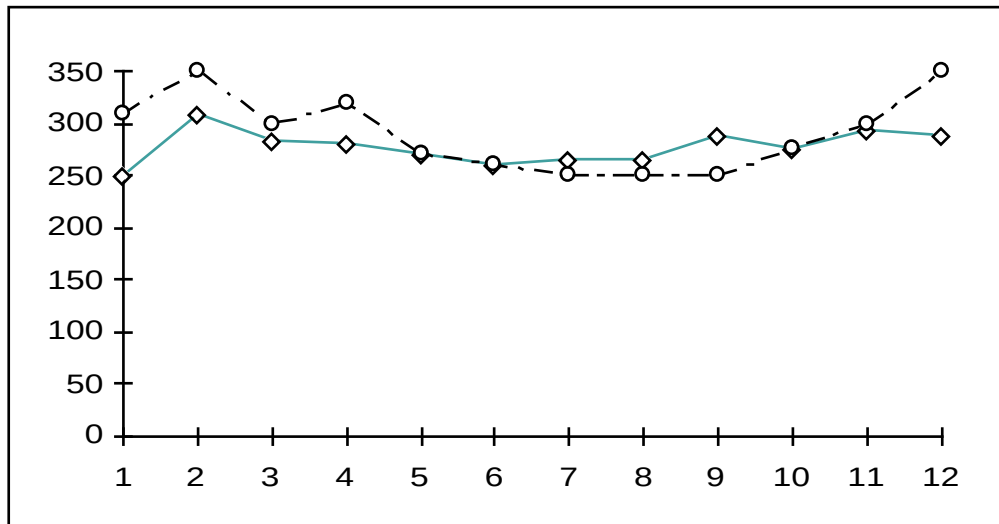




## Graphiques ...

•• Un importateur présente son *bilan* pour les deux dernières années d'une part sous forme d'un tableau, d'autre part sous forme d'un graphique.

|            | Janv | Fév | Mars | Avril | Mai | Juin | Juil | Août | Sept. | Oct. | Nov. | Déc. |
|------------|------|-----|------|-------|-----|------|------|------|-------|------|------|------|
| année 1991 | 250  | 310 | 285  | 280   | 270 | 260  | 265  | 265  | 290   | 275  | 295  | 290  |
| année 1992 | 310  | 350 | 300  | 320   | 270 | 260  | 250  | 250  | 250   | 275  | 300  | 350  |



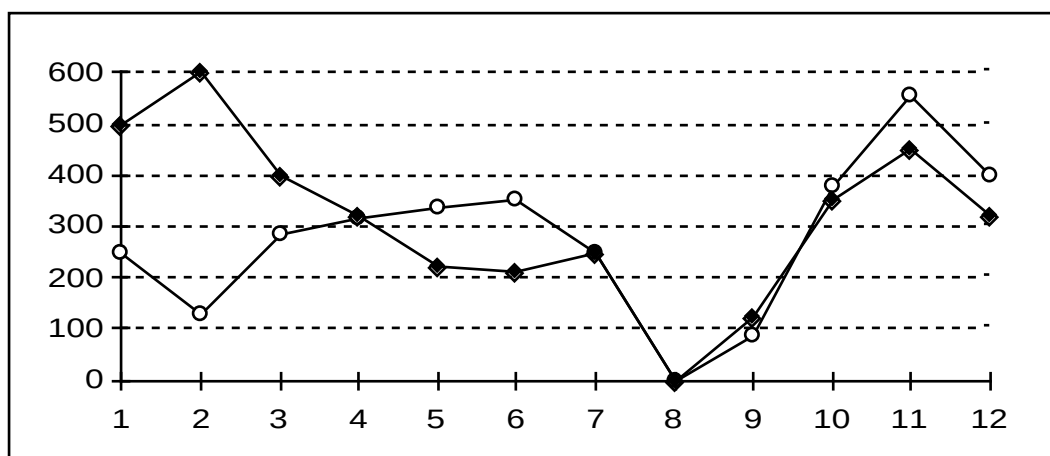
130/ Quels conseils donneriez-vous à l'importateur pour rendre le graphique plus *parlant* ? Dessinez un tel graphique et explicitez les tendances qui s'en dégagent.

131/ Pour chacune des deux années, précisez la valeur moyenne des importations mensuelles. Dressez dans un tableau les écarts, positifs ou négatifs à cette moyenne.

132/ On décide de regrouper les résultats par trimestre. Présentez les sous forme d'un histogramme double.

133/ Pour une année, exprimez les résultats trimestriels en pourcentage. Visualisation par des secteurs angulaires.

134/ Voici les courbes de son concurrent le plus direct.



Pouvez-vous reconstituer ses tableaux de résultats ? Que pensez-vous des résultats de ce concurrent en Août ? Cet importateur excipe

d'une progression de ses ventes de 12%. Ce chiffre est-il correct pour le dernier mois, le dernier trimestre, pour l'année entière ?

## Applications affines et représentations de droites

- On appelle application affine toute fonction de la forme  $f(x) = ax + b$
- On appelle équation cartésienne d'une droite une relation de la forme  $ux + vy + h = 0$ .
- La plupart du temps une droite  $\{ux + vy + h = 0\}$  peut être vue comme le graphe d'une fonction  $[f(x) = ax + b]$  et lycée-de-versailles...

135/ Représentez les fonctions suivantes :

$$f(x) = 2x + 3 \quad g(x) = -\frac{1}{2}x + 3 \quad h(x) = 2x - 3$$

Que constatez-vous ? Généralisation ?

136/ Représentez les droites d'équations :

$$(a) 10x + 10y - 20 = 0 \quad (b) 5x - 5y + 8 = 0$$

De quelles fonctions, ces droites seraient-elles le graphe représentatif ?

137/ L'eau monte dans mon bateau de 12 cm par heure. 8 heures après le début de mon avarie, j'en ai déjà 95 cm. Combien de temps me reste-t-il pour trouver mon écope ? Visualisation ?

138/ Maintenant on vide un réservoir de gasoil (contenance 1250 l) à raison de 20 litres par minute. Graphique du désastre ?

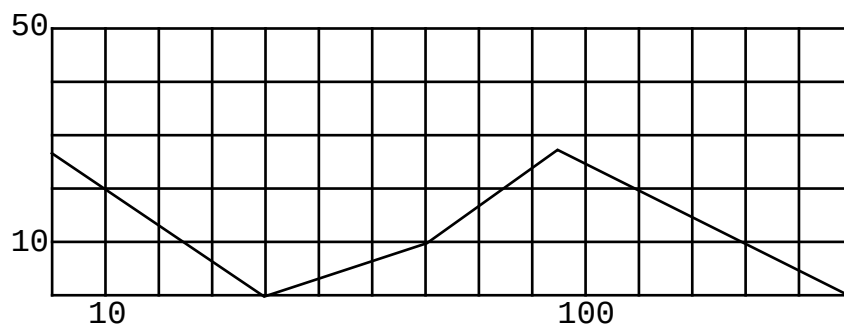
139/ Exprimez l'âge P d'un père en fonction de celui F de son fils, sachant que le père a eu 33 ans quand son fils entrait dans l'âge de raison...

## Applications affines par morceaux

140/ Représentez la fonction définie par morceaux :

$$\begin{cases} \text{si } x \leq -2 \text{ alors } f(x) = -x + 1 ; \\ \text{si } -2 \leq x \leq 3 \text{ alors } f(x) = |x - 1| ; \\ \text{si } x \geq 3 \text{ alors } f(x) = -2x + 8 \end{cases}$$

141/ {Exercice inverse du précédent} Ceci est un graphe :



Définition analytique ?

## Proportionnalité (numérique)

142/ On donne le tableau suivant :

|   |    |    |      |      |      |    |      |
|---|----|----|------|------|------|----|------|
| x | 12 | 32 | -6   | 12,8 | 18   | 20 | 14   |
| y | 9  | 24 | -4,5 | 9,6  | 13,5 | 15 | 10,5 |

Placer dans un repère idoine les points (x,y) correspondants. Constats ? Loi  $x \rightarrow y$  ? Choisissez deux nombres u et v ; si l'on place  $12u+32v$  en ligne x, quel nombre devez-vous lui associer en ligne y ? Les deux suites de nombres sont dites proportionnelles. Que peut bien désigner le coefficient de proportionnalité ?

143/ Complétez les tableaux sachant qu'il y a proportionnalité entre première et seconde ligne.

|    |    |    |     |     |      |
|----|----|----|-----|-----|------|
| 56 | 35 | 77 |     |     | -6,3 |
|    | 25 |    | 105 | 7,5 |      |

|     |     |    |     |     |
|-----|-----|----|-----|-----|
| 2,5 |     | 15 | 115 |     |
|     | -49 | 21 |     | 1,4 |

144/ Trouvez des triplets d'entiers positifs proportionnels aux triplets suivants et formés d'entiers les plus petits possibles :

(150 ; 72 ; 48) -- (2/3 ; 4/9 ; 5) -- (4/7 ; 2 ; 6/7)

145/ Trouvez trois nombres proportionnels à (3 ; 4 ; 5) et dont la somme vaut 60. Idem avec (5 ; -4 ; 3) et 60.

## Vitesses et débits

146/ Une automobile roule à 120 km/h. Combien de temps lui faudra-t-elle pour parcourir 50 km ? 120 km ? 320 km ? Quelle distance aura-t-elle parcourue en 1 h 15 min ? En 3 h 20 min ?

147/ Un cycliste gravit une côte de 18 km en 3 h 12 min, se repose au sommet pendant 30 minutes, enfin (re-)dévale la côte en 19 minutes. Chronogramme ? Vitesse moyenne lors de l'ascension, de la descente ? Moyenne de ces deux vitesses et vitesse moyenne du périple total, pause non comprise ?

148/ Un bassin contient 800 m<sup>3</sup> de nitrates. On ouvre une vanne pour le vidanger. La première heure, son débit est de 20 l/s ; mais d'une heure à l'autre, le débit chute de 10%. On ferme la vanne après 6 heures de vidange. Courbe des volumes restant au fur et à mesure ? Débit moyen de la vanne ?

## Pourcentages

149/ Elections : 32540 inscrits ; 12400 suffrages au premier tour ; 5250 bulletins au candidat sortant. Résultat en % des votes exprimés ? Second tour : 18400 suffrages exprimés dont 11900 pour le candidat sortant. Evolution en % des suffrages exprimés, des votes du candidat (réélu) ?

150/ Le prix d'un article passe de 1890 à 1575 francs TTC. Pourcentage de baisse ? La TVA sur cet article passe de 20,6 % à 33 %. Pourcentage de hausse ?

151/ Un minerai contient 69% de fer. Combien de tonnes faut-il extraire pour obtenir 4000 tonnes de fer ?