Planche MS 1

1/ On peut enfiler au plus 5 perles par tige. Premier choix : on peut échanger ces 5 perles contre une plus à gauche (base 5) et on trouvera Ø4Ø4. Second choix : les paquets sont de 5 + 1 objets (base 6). L'abaque indiquera Ø252 en fin d'opération.

2/ On numérote les roulettes de la gauche vers la droite ; chaque roulette tourne quatre fois moins vite que sa voisine de droite : autrement dit, pour que la première roulette tourne d'un cran, il faut que la quatrième tourne 64 fois d'un cran. Noter que si elle part de Ø, elle revient à Ø en ce cas. De même pour que la troisième roulette tourne d'un cran, il faut que sa voisine de droite tourne de 4 crans ; et si elle part de Ø, alors elle revient à Ø. Au bout du compte, on a activé le compteur de 2*64 + 3*4 + 1 = 141 coups.

3/ Remarque préliminaire : dans le système proposé, on ne peut garder plus de 3 jetons d'une même couleur à la fin des échanges.
◊ Lucien semble maîtriser la règle des échanges ; Marie a correctement effectué ses échanges du premier ordre, mais n'a pas transféré la règle au deuxième ordre (pb typique de récurrence) ; Paul ne semble pas maîtriser la règle, même pour le premier ordre.
◊ On doit obtenir 3 jetons jaunes et 2 jetons verts en remplacement des 44 blancs.
◊ 1 blanc, 2 verts, 2 jaunes, 1 bleu –› 105 jetons blancs.
◊ neuf = ronde_croche six = blanche_noire quatorze = ronde_blanche_noire. Non ! il s'agit d'un système de numération additive d'ailleurs très limité : impossible de dépasser quinze.

Planche MS 2

5/ 1 000 080 000

6/ quatre-vingt dix-neuf millions neuf cent quatre-vingt dix-neuf mille neuf cent quatre-vingt dix-neuf.

7/ Non ! Si le nombre de dizaines est 31 alors le chiffre des centaines est 3.

8/ Entre 1 et 299, il y a 30 dizaines ou assimilées : 1 à 9, 10 à 19, 290 à 299. Dans chaque dizaine, le chiffre trois est utilisé une fois au rang d'unité (total partiel : 30). On a trois dizaines particulières où le chiffre 3 apparaît au rand de dizaines : 30 à 39, 130 à 139, 230 à 239. Le total partiel augmente de 30. Enfin la 300^{ième} page exhibe encore un 3. Résultat définitif : 61 chiffres 3.

9/ Vingt fois le chiffre 5.

10/ $\underline{99}_{10} = \underline{10}_{99} = \underline{120}_{9}$ {Attention : la notation employée en 10/ et suivantes n'est pas canonique. $\underline{\quad}_{99}$ signifie "en base 99" par exemple.}

11/ $\underline{22}_{10} = \underline{10110}_{2}$ $\underline{333}_{10} = \underline{110100}_{3}$ $\underline{4444}_{10} = \underline{1011130}_{4}$

$\underline{55555}_{10} = \underline{3234210}_{5}$ $\underline{666666}_{10} = \underline{22142230}_{6}$ etc.

12/ $\underline{3772}_{10} = \underline{13666}_{7} = \underline{2224}_{12}$

13/ On doit résoudre l'équation à trois termes entiers compris entre 0 et 6 : $a.7^2 + b.7 + c = c.11^2 + b.11 + a$ que l'on peut réduire en $b = 12a - 30c$. On trouve deux solutions :
$\underline{502}_7 = \underline{247}_{10} = \underline{205}_{11}$ $\underline{361}_7 = \underline{190}_{10} = \underline{163}_{11}$

14/ 21 x 14 = 324 se traduit par : $(2a+1).(a+4)= 3a^2 + 2a + 4$. On trouve a = 7 ; le deuxième produit est valide dans toute base supérieure ou égale à 7.

15/ ◊ Les additions et soustractions peuvent être effectuées en mentalisant un compteur dans la base correspondante.
Exemple pour 3421 + 230 en base 5 :
3421-(+10)->**3431**-(+10)->**3441**-(+10)->**4001** (double retenue)
4001-(+100)->**4101**-(+100)->**4201** résultat final
et pour 41 - 27 en base 12 :
41-(-10)->**31**-(-10)->**21**-(-1)->**20**-(-1)->**1β**-(-1)->**1α**
1α-(-1)->**19**-(-1)->**18**-(-1)->**17**-(-1)->**16** résultat final
◊ Dans le cas des produits, il convient de dresser les tables de multiplication dans les bases correspondantes :

table pour la base 5 :

x	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

table pour la base 2 :

x	0	1
0	0	0
1	0	1

◊ D'où les résultats escomptés :
$\underline{3421}_5 + \underline{230}_5 = \underline{4201}_5$ $\underline{431}_5 - \underline{132}_5 = \underline{244}_5$ $\underline{213}_5 \times \underline{14}_5 = \underline{4042}_5$
$\underline{39\beta7}_{12} + \underline{213}_{12} = \underline{400\alpha}_{12}$ $\underline{\beta\beta\beta}_{12} - \underline{123}_{12} = \underline{\alpha98}_{12}$ $\underline{27}_{12} \times \underline{41}_{12} = \underline{\alpha67}_{12}$
dont ceux non détaillés pour la base 2 : 100100, 110, 10101

16/ 5418 = 3600 + 1800 + 18 => 1.[3600] + 3.[600] + 1.[10] + 8.[1]
292 = 240 + 50 + 2 => 4.[60] + 5.[10] + 2.[1]
5710 <= 1.[3600] + 3.[600] + 5.[60] + 1.[10]
On laisse le lecteur transcoder directement les quantités entre crochets à l'aide des symboles sumériens. La dernière énigme est traitée graphiquement :

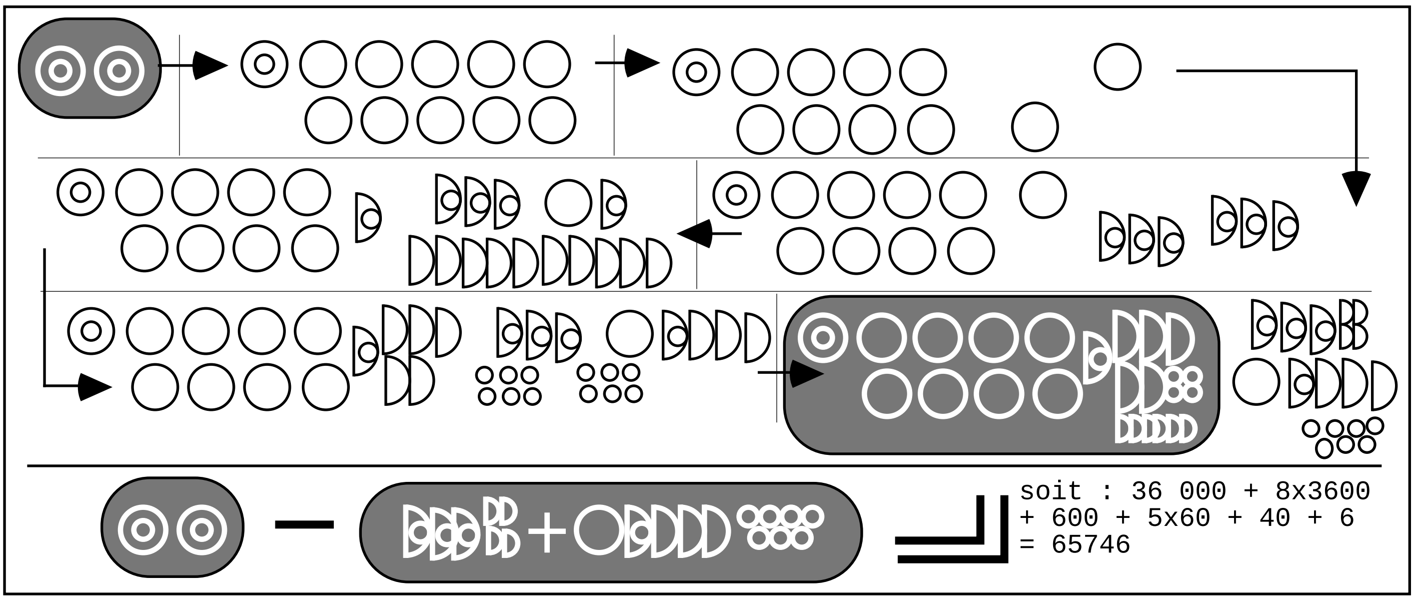


Planche MS 3

17/ $753 = 3 \times 251$ $856 = 2^3 \times 107$ $990 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 11$
$2184 = 2^3 \times 3 \times 7 \times 13$ $3150 = 2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$
$3960 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 17$ $3064 = 2^3 \times 383$ $5185 = 3 \times 251$
$6018 = 2 \times 3 \times 17 \times 59$ $16335 = 3^2 \times 5 \times 11^2$
$56805 = 3 \times 5 \times 7 \times 541$
Question annexe : Soit n un entier à décomposer en produit de facteurs premiers. Au plus un terme de cette décomposition peut être supérieur à la racine carrée de n. Donc, quand on a trouvé tous les termes de la décomposition inférieurs à la racine carrée de n, ou bien leur produit vaut n (on a fini) ou bien leur produit divise n dans un rapport plus grand que la fatidique racine de n et ce rapport est un nombre premier.

18/ $n = 111.q + r$ avec $r < 111$ $1000.n = 111.(1000.q + 9.r) + r$
Donc le reste dans la division par 111 ne change pas.
◊ Le nombre 111 111 est clairement multiple de 111.
100 010 001 = 1000.1000.100 + 1000.10 +1 Dans la division par 111 de ces trois termes on *récupère* 100 + 10 + 1 soit 111 qui offre une part de plus (il n'y a donc point de reste).
◊ De même : 10 000 100 001 = 10.1000.1000.1000 + 100.1000 + 1 ce qui permet de conclure comme ci-dessus.
◊ En fait 100 010 001 = 3.7.13.37.9901 111 111 = 3.7.11.13.37
et 10 000 100 001 = 3.31.37.2906161

19/ La décomposition du nombre P est déjà donnée. P+2 est divisible par 2, ainsi que P+4, P+6, P+8, et ainsi de suite jusqu'à P+16 ; P+3 est divisible par 3, ainsi que P+6, P+9, P+12, P+15 ; P+5 est divisible par 5, P+7 par 7, P+11 par 11, P+13 par 13, et P+17 par 17. Donc aucun de ces 17 nombres entiers n'est premier. Plus généralement, pour avoir n entiers consécutifs non premiers, il suffit d'exhiber le produit P = 2.3. … u.v constitués des premiers nombres premiers tels que v (le dernier dans la liste) soit supérieur ou égal à n. Les entiers P+2, P+3, … P+v répondent à la question.

20/ $x^2 - y^2 = n \Leftrightarrow (x- y)(x + y) = n$ ❶
a) n = p.q ; le produit d'un entier par un nombre pair est un nombre pair. Donc p et q sont impairs tous les deux si l'on veut que n soit impair. 255 = 85.3 = 17.15 ; l'équation ❶ admet les couples (44,41) et (16,1) comme solutions. Attention, on prend systématiquement p>q pour que p-q reste entier positif.
b) n est maintenant pair. Soient p et q deux entiers tels que n=p.q ; p ou q est donc pair. Identifiant p à x-y et q à x+y, on en déduit l'identification (x,y) = [(p+q)/2 , (p-q)/2]. En particulier, les deux termes p et q doivent être pairs pour que x et y soient bien des nombres entiers ; ipso facto n doit être multiple de 4, pour qu'il y ait des solutions. Application : $n = 360 = 2^3.3^2.5 = 2.180 = 4.90$ On trouve (91,89) (47,43) comme seuls couples solutions.

21/ a) Equation : $n^2 + n + 1 = 13.k$ ❷ $3^2+3+1 = 13.1$ $9^2+9+1 = 13.7$
b) On substitue n=13.q+r dans l'équation ❷ et l'on remembre d'où ❸ : $r^2 + r + 1 = 13.(k - 13.q^2 - 2.q.r - q)$ avec r <13. Donc $r^2 + r + 1$ doit être un multiple de 13 inférieur à 157 $(12^2 + 12 + 1)$; en balayant les valeurs possibles pour r on isole les seules solutions r = 3 et r = 9, dont on déduit les formes générales n = 13.k + 3 et n = 13.k + 9 ; k nombre entier positif …

22/ 19 x 100 = 1900 ⇒19 x 200 = 3800 et 19 x 50 = 950 Dès lors 19 x 250 = 4750 Donc 4937 - 4750 = 187 = 190 - 3 = 19 x 9 + 16 In fine 4937 = 19 x 259 + 16.

23/ Le quotient est 4 ; le quotient ne change pas ; le quotient est multiplié par le facteur.

24/ A = 5.Q + 3
a) 14.A = 5(14Q + 8) + 2 ; 2 est le nouveau reste
b) m.A = 5.m.Q + 3.m et 3.m = 5.Q’ + R’ D’où la règle : on pose la division de 3.m par 5 pour obtenir le reste.
Exemples i) m = 328 3.m = 984 = 196 x 5 + 4
ii) $m = 5^{36} + 2$ $3.m = 3.5^{36} + 6 = 5.(3.5^{35} + 1) + 1$
c) Pour compléter le tableau, on doit inscrire successivement 3, 1, 4, 2, 0, 3 à nouveau pour 6A et ainsi de suite.
d) Donc si m.A a pour reste R, élément de {3 1 4 2 0} alors (m+1).A a pour reste son suivant dans le cycle exprimé ci-dessus. En pratique, pour obtenir R, diviser m par 5 et noter le reste t ainsi obtenu. Si t est nul, R l’est aussi, sinon, R est l’élément du cycle {3 1 4 2 0} de rang t.

25/ Traduction des clauses : A = N . 82 + 47 A = XYX ou XXY ou YXX
1er Cas : N est le dividende ; donc N est supérieur au reste 47. Mais alors : N . 82 > 47 x 82 (=3983) ce qui viole le clause sur le nombre de chiffres de A.
2ième Cas : N est le quotient et 82 le dividende. Il suffit de faire une recherche exhaustive en faisant varier N entre 1 et 11 (noter que 12 x 82 + 47 = 1031). On trouve ainsi deux réponses : 949 = 11 x 82 + 47 et 211 = 2 x 82 + 47.

26/ cdu = 37.Q + Q = 38.Q (avec Q < 37 en tant que reste). Comme 999 = 38 x 26 + 11 et 100 = 38 x 2 + 24, on en déduit que tous les entiers de la forme 38.Q ($2 \le Q \le 26$) conviennent.

27/ 111 111 = 111 x 1001 = 111 x 11 x 91 = 111 x 11 x 13 x 7 mais 111 = 3 x 37 et donc 111 111 = 3 x 7 x 11 x 13 x 37. D’où le résultat concernant 888 888.

28/ 1xxy est divisible par 9 se traduit par s = 1 + 2.x + y multiple de 9. On profite de la clause de divisibilité par 5.
1er cas y = 0 alors s = 1 + 2.x multiple de 9 signifie x = 4 ;
2eme cas y = 5 alors s = 3.(2 + x) multiple de 9 si x = 6.
D’où les solutions : 1440 et 1665.

29/ n = 37a28b n est divisible par 6, donc par 2 et par 3 ; b est donc pair (b=2.k). Mais n est aussi divisible par 45 donc par 5 (b=0 ou b=5) et par 9. Donc b est nul ! Et la somme des chiffres est multiple de 9 : 7+a+2+8+0=9.u ⇔ a+2=9.u ⇔ a=7
D’où la solution 377280 = 2 x 45 x 4192

30/ Il suffit de chercher le chiffre des unités de 8^{28}. On lit la table de Pythagore de 8 en ne s’occupant que du chiffre des unités : 8^2 (8x8) → 4 8^3 (4x8) → 2 8^4 (2x8) → 6 8^5 (6x8) → 8
8^6 (8x8) → 4 On boucle de 4 en 4. Or 28 = 6 x 4 + 4
Donc le chiffre des unités est celui de 8^4 soit 6.

40/ 1001 = 7 x 13 x 11 est le secret de l’affaire.

41/ Correction de l'énigme triangulaire ci-contre :

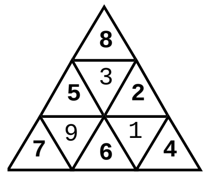


Planche MS 5

42/ Les Diviseurs de 10101 sont :
1 3 7 13 21 37 39 91 111 259 273 481 777 1443 3367 10101
Ceux de 111111 sont (sauf le dernier 111 111):
1 3 7 11 13 21 33 37 39 77 91 111 143 231 259 273 407 429 481 777 1001 1221 1443 2849 3003 3367 5291 8547 10101 15873 37037
Tous les diviseurs du premier sont diviseur du second, ce qui n'est pas pour surprendre car 111 111 = 11 x 10101 … et donc 10101 est leur PGCD.

43/ PGCD (91,56) = 7 PGCD (286,121) = 11 PGCD (13,119) = 1

44/ Nombres premiers entre eux : nombres qui n'admettent que 1 comme seul diviseur commun (leur PGCD est donc 1).

45/ Oui à la première question, non à la seconde.

46/ Donc l'autre est multiple du premier. C'est le cas dans 42/.

47/ (91,56) $\rightarrow$ 5 x 91 - 8 x 56 = 7 = 5 x 56 - 3 x 91
(286,121) $\rightarrow$ 3 x 286 - 7 x 121 = 11 = 19 x 121 - 8 x 286
(13,119) $\rightarrow$ 55 x 13 - 6 x 119 = 1 = 7 x 119 - 64 x 13
Le formule de Bezout s'exprime aussi bien comme :
a.u - b.v = d {a, u, b, v d tous entiers positifs}
Ainsi la formule de Bezout en (u,v) pour le couple (a,b) devient formule en (a,b) pour le couple (u,v), au facteur multiplicatif d près. Considéré en (u,v) on peut simplifier la formule (a $\rightarrow$ a/d, b $\rightarrow$ b/d, d $\rightarrow$ 1) en sorte que ce couple (u,v) admet 1 comme PGCD : les deux nombres u et v sont premiers entre eux.

48/ En utilisant Bezout : 3 x 2 - 1 x 5 = 1 = 1 x 5 - 2 x 2. Pour un achat de 56 F, je peux donner 168 pièces de 2 F et l'on me rend 56 pièces de 5 F ou 56 pièces de 5 f et l'on me rend 112 pièces de 2 F. Mêmes jongleries peu pratiques pour les autres sommes. Il peut être intéressant d'introduire des billets de 20 et 50 francs. Ainsi, pour payer mon article de 73 F, je peux donner un billet de 50 F, un billet de 20 F et une pièce de 5 F, et l'on m rendra une pièce de 2 F. Etc.

49/ Mon chèque valait en centimes : 100.X + Y ; le caissier m'a versé (toujours en centimes) 100.Y + X soit 5 centimes de plus que le double de la somme libellée (donc 200.X + 2.Y). En résumé : 100.Y + X = 50 + 200.X + 2.Y $\Leftrightarrow$ 98.Y - 199.X = 5
Mais les deux nombres 98 et 199 sont premiers entre eux et le théorème de Bezout est valide ; on repère ainsi que :
132 x 98 - 65 x 199 = 1 = 33 x 199 - 67 x 98
{Cf. ❼ et ❽ ci-dessous}. Par combinaisons successives, on va produire une écriture offrant les valeurs de X et Y.
98 x 132 - 199 x 65 = 1
199 x 33 - 98 x 67 = 1 (on additionne terme à terme)
98 x 65 - 199 x 32 = 2 (65 = 132 - 67 et 32 = 65 - 33)
98 x 132 - 199 x 65 = 1 (on additionne terme à terme)
98 x 197 - 199 x 97 = 3 (197 = 132 + 65 et 97 = 32 + 65)
199 x 33 - 98 x 67 = 1 (on additionne terme à terme)
98 x 130 - 199 x 64 = 4 (130 = 197 - 67 et 64 = 97 - 33)

199 x 33 - 98 x 67 = 1 (on additionne terme à terme)
98 x 63 - 199 x 31 = 5 On peut prendre X = 31 et Y = 63.
Mon chèque portait la somme de 31 Francs et 63 centimes.

Addendum : Obtention des relations de Bezout utilisées ci-dessus. Il existe un algorithme mais cet algorithme est lent et pénible à mettre en œuvre manuellement (autant le laisser aux ordinateurs). Ici, on se contente d'une démarche plus intuitive. On repère : 199 = 2 x 98 + 3 ⇔ 199 - 2 x 98 = 3 ❹
On cherche U et V tels que

199 x U - 98 x V = 1 ⇔ 199 x 3.U - 98 x 3.V = 3 ❺

En composant les équations ❹ et ❺ on obtient :

199 x (3.U - 1)= 98 (3.V - 2) ❻

Comme 199 et 98 sont premiers entre eux, (3.U - 1) est divisible par 98 et (3.V - 2) par 199, avec le même quotient. Autant prendre ce quotient minimal, soit 1, et donc U égal à 99/3=33 et V à 201/3=67. Ainsi : 199 x 33 - 98 x 67 = 1 ❼. En ajoutant terme à terme à cette relation ❼. la tautologie 98 x 199 - 199 x 98 = 0, on s'offre la seconde identité de Bezout 98 x 132 - 199 x 65 = 1 ❽ .

50/ 286 = 2 x 11 x 13 121 = 11 x 11
Les diviseurs de 286 sont 1 2 11 13 22 26 143 286
Ceux de 121 sont 1 11 121
Donc le PGCD de 286 et 121 est 11. Sa décomposition en facteurs premiers est l'intersection des décompositions des 2 termes (286 et 121 ici).

51/ 42 → 42 84 126 168 210 252 294 336 378 420 462 **504** 546 588 630 672 714 756 798 840 882 924 966 **1008** 1050 1092
72 → 72 144 216 288 360 432 **504** 576 648 720 792 864 936 **1008** 1080 1152 {Arrêt au $15^{\text{ième}}$ car on dépasse la suite de 42}
Multiples communs à ces 2 listes : 504 1008
Le PPCM de 42 et 72 est 504. La liste des communs multiples de 42 et 72 est constituée des multiples de 504.

52/ Le but de cet exo est de rappeler que la décomposition du PPCM de deux nombres est la réunion des décompositions de chacun des deux nombres.
42 = 2.3.7 72 = $2^3.3^2$ 504 = $2^3.3^2.7$

53/ Le plus petit entier divisible par 2, 5, 6 est 2.5.3 = 30. Pour répondre à la seconde question, il suffit de chercher le plus petit multiple commun à 11 et à 9 (soit 99) et de lui ajouter 3, d'où 102.

54/ La première comptine est à 9 temps, la seconde à 10 temps. Les chiffres communs se trouvent aux rangs multiples de 10 et de 9, soit 90, 180, etc. Le premier chiffre commun sera donc 1 …

Planche MS 6

55/ Le premier compteur va égrener a^p écritures différentes avant de revenir à zéro et le second b^p. Ils reviendront ensemble à zéro après T tops avec T =PPCM(a^p, b^p).

56/ Le PPCM de 60 et 62 est 1860 : 1860 = 60 x 31 = 62 x 30. Donc le prochain top commun aura lieu après 31 heures marquées sur la première horloge, soit le lendemain à 7 heures du soir. Noter que la seconde horloge retarde. Au même moment elle affichera 6 heures du soir. Comme cette horloge paresseuse prend 2 s de retard toutes les heures, elle sonnera 16 s après sa camarade à 3 heures du mat.

57/ Le PPCM de 4 et 6 est 12 : quand Paul termine son troisième tour, Virginie achève son second, tout ceci 12 minutes après leur départ. Mais cette rencontre a lieu au point A ; la vraie question est de savoir s'ils ne pourraient se rencontrer, plus tôt, c'est à dire en B. Un rapide petit chronogramme permet de répondre négativement.

58/ 3584 x 768 = 2 752 512   PGCD (3584,768) = 256
PPCM (3584,768) = 10752   256 x 10752 = 2 752 512
Loi générale : le produit de 2 nombres est égal au produit de leur PGCD et de leur PPCM.

59/ La situation dite du billard est une illustration du résultat énoncé en 58/. On passe par toutes les cases si et seulement si les nombres x et y (respectivement de colonnes et de lignes) sont premiers entre eux. Le nombre de cases traversées n'est rien que leur PPCM. C'est donc aussi le produit x.y quand le PGCD vaut 1.

Planche MS 7

A = 1,3   B = - 18,3C = - 92,84   D = 64

E = 22   F = 841   G = 2^{14} = 16384

H1 = 13/9 = $1,\underline{4}$ H2 = 2/7 = $0,\underline{285714}$ H3 = 21/11 = $1,\underline{90}$
{Le soulignement repère la partie périodique dans les développements décimaux infinis périodiques.}
H4 = 3/7 = $0,\underline{428571}$ H5 = 19/12 = $1,58\underline{3}$

I1 = -37/36 = $-0,2\underline{7}$ I2 = 85/36 = $2,36\underline{1}$ I3 = 29/24 = $1,208\underline{3}$

J1 = 14/9 = $1,\underline{5}$ J2 = 27/25 = 1,08   J3 = 4/7 = $0,\underline{571428}$

K1 = -130/9 = $-14,\underline{4}$

L1 = 55591/308700 308700 = $2^2*3^2*5^2*7^3$ 55591 = 23*2417 donc L1 n'est pas décimal ; son développement est infini périodique (et sa période de longueur inférieure à 3086). On peut tenter une recherche à la calculette au risque de ne pas pouvoir détecter trace de la fatidique période. Avec un ordinateur, on peut programmer cette recherche. Voici l'issue d'une recherche effectuée grâce au langage Logo :

```
Recherche du développement décimal de la fraction 55591 / 308700
0 , 180 080 984 774 862 325 882 734 045 999 352 121 801 101 392 938 127 632 005 183 025 591 188 856 494 978
943 958 535 795 270 489 148 040 168 448 331 713 637 836 086 815 678 652 413 346 290 897 311 305 474 570 780
693 229 672 821 509 556 203 433 754 454 162 617 427 923 550 372 529 964 366 699 060 576 611 597 019 760 285
066 407 515 387 107 223 841 917 719 468 739 876 903 142 209 264 658 244 25 [0…
On vient de boucler sur le 3 -ième reste : développement périodique infini
```

Le lecteur pourra évaluer la longueur de la période : 294 !

L2 = 445/24 = $18,541\underline{6}$

M1 = 42732 * 10^{-2} M2 = -32 * 10^{-2} M3 = 4503 * 10^{-2}
M4 = 728 * 10^{-2} M5 = 35701 * 10^{-2} M6 = 42 * 10^{-3}
M7 = 972 * 10^{-5} M8 = 257 * 10^{-4} M9 = 342 * 10^{-2}
M10 = 42 * 10^{2} M11 = 7125 * 10^{-2}

Planche MS 8

74/ On trouve successivement :
45,0317,942,05
50,7215,7 2,14

75/ On trouve successivement :
2 2 0
4 0 1

76/ Compléter les cases vides à l'aide des valeurs :
1,25 0,0534 0,0123
5 823,546 0,024 508

77/ Compléter les cases vides en s'inspirant de :
$8{,}2369 = 82369 * 10^{-4} = 8{,}2369$ EØ
$2{,}71 = 271 * 10^{-2} = 2{,}71$ EØ
Ø,ØØØ314 = $314 * 10^{-6}$ = 3,14 E-4
Ø,ØØØØØ1 = $1 * 10^{-6}$ = 1 E-6

78/ 0,027 est entre 0,01 et 0,1 ; 3,245 est entre 3,2 et 6,5 ; enfin 7,32 est entre 6,5 et 10.

79/ Les écritures virgulaires cherchées sont respectivement :
0,2 0,2 2,75 0,04 0,35 0,3 (car 111 = 3 * 37) 0,015625 (à la calculette mais pas de tête) 0,$\underline{3}$ (attention période) 1,4

80/ 22/7 est une fraction irréductible dont le dénominateur viole le critère de décimalité ; même raisonnement pour 1/9 ; √2 et π sont des nombres irrationnels typiques ; en revanche 17,999… (infinitude de 9) est une écriture illégale de l'entier 18 : c'est donc un nombre décimal.
{Cet exercice n'est intéressant que parce qu'il permet d'opposer définition -être décimal- et critère -comment repérer qu'un nombre est un décimal, sous entendu sans le mettre sous sa forme décimale.}

81/ 3/5 = 6/10 22/7 = 44/14 = 3+1/7
0,810 = 810/1000 = 81/100 = 0,81

82/ on trouve par demi-somme 12,0915 et 500,200604 respectivement.

Planche MS 9

83/ La représentation décimale d'une fraction a/9 est q,$\underline{r}$ (attention période soulignée selon la convention déjà utilisée ci-dessus) où q et r représentent respectivement le quotient et le reste de a dans la division euclidienne par 9. Exemple : 471 = 9 * 52 + 3 donc 471/9 = 52,$\underline{3}$

84/ Dans le cas des fractions a/11 non simplifiables, on peut toujours se ramener au cas a ≤ 10. Soit b et c les deux chiffres tels que 9 * a = bc (exemple 9 * 3 = 27) ; alors l'écriture décimale est 0,$\underline{bc}$ (période de longueur 2).

85/ 1/17 = 0,$\underline{0588235294117647}$ 2/17 = 0,$\underline{1176470588235294}$ etc.

On tient 16 fractions différentes (toutes irréductibles) de 1/17 à 16/17 ; on peut montrer que la période dans leur développement décimal est maximale (donc de longueur 16).

On peut aussi montrer qu'en faisant tourner d'un cran vers la gauche à chaque fois le cycle (ainsi 0588235294117647 donne 7058823529411764 puis 4705882352941176 etc.) on engendre les 16 fractions dans l'ordre suivant :
1/17 12/17 8/17 11/17 13/17 3/17 2/17 7/17 16/17 5/17 9/17 6/17 4/17 14/17 15/17 10/17 1/17

Ces résultats sont fortement liés aux puissances successives de 12 modulo 17 …
Ces démonstrations dépassent le niveau exigible au concours.

86/ 5/160 = 1/32 = 0,03125   97/200 = 0,485
4343/3232 = 43/32 = 1,34375

87/ Pour que 17u/6 soit décimale, il faut que 17u contienne au moins un facteur 3. Seuls 171, 174, 177 sont divisibles par 3 d'où 3 solutions.

Dans le deuxième exercice, on repère 105 = 21 * 5 . Donc 1c11 doit être divisible par 21, en particulier par 3. Les candidats sont 1011, 1311, 1611, 1911 dont seul le dernier est divisible par 7 : 1911/105 = 91/5 = 18,2.

88/ Pour répondre sans calculette, isoler systématiquement partie entière et partie fractionnaire :
13/4 = 3 + 1/4 16/5 = 3 + 1/5 19/6 = 3 +1/6 par exemple ;
donc 13/4 > 16/5 > 19/6 .
Dans d'autres cas, il faut se montrer malin.
Ainsi 179/57 = 3 + 8/57 < 3 + 8/56 = 3 + 1/7.
Donc 179/57 est nécessairement inférieur à 19/6.

89/ Résultats définitifs attendus : 33/15 et 47/56 non listés parmi les résultats possibles (glubs).

90/ 342/11 = 31 + 1/11 n'est pas décimale. Comme 1/11 = 0,$\underline{09}$ le 75$^{\text{ième}}$ chiffre après la virgule est un Ø, le 76$^{\text{ième}}$ un 9.

91/ 30/14 = 15/7 = 2 + 1/7. Comme 1/7 = 0,$\underline{142\ 857}$ (attention période)on retrouve les mêmes chiffres cycliquement (tous les 6 coups) dans l'écriture décimale. Les premier, septième, treizième, vingtième chiffres sont un 1 ; les second, huitième, quatorzième sont un 4.
Pour dire vite il suffit de calculer modulo 6 : 1, 7, 13, 20, 27 ont tous 1 dans leur division par 7 ; 2, 8, 9, 14, 21 ont 2 comme reste ; pour en revenir aux questions posées : 63 = 3 [mod 6] le 63$^{\text{ième}}$ chiffre est un 2 ; 102 = 0 [mod 6] ce qui signifie que le 102$^{\text{ième}}$ chiffre se trouve à la fin d'une période , c'est un 7.

92/ Le développement décimal proposé n'est rien que celui de la fraction 1/7 d'après ce qui précède.

Pour le vérifier, on pose successivement :
A = 0,$\underline{142\ 857}$ => 1 000 000 * A = 142 857 + 0,$\underline{142\ 857}$
Soit 1 000 000 * A = 142 857 + A => 999 999 * A = 142 857
Il vient A = 142 857 / 999 999 fraction heureusement simplifiable : A = 15 873 / 111 111 = 143 / 1001 = 1 / 7

93/ Soit N/D une fraction de dénominateur D = 9...9 (p chiffres 9). On peut supposer N/D < 1 : son numérateur N a au maximum p chiffres N = ab..e. Or D = 9...9 = 10..0 - 1 = 10^p - 1.

On écrit : N * 10 = a...e * 10 = ab..eØ = a * 10..0 + b..eØ
soit N * 10 = a * 9...9 + a + b..eØ = a * 9...9 + b..ea.

Conséquence 10 * N/D = a + b..ea/9...9. Dans la division de N par D, viendra derrière la virgule a et restera b..ea ; viendra alors b et restera c..eab et ainsi de suite (p fois pour être précis) jusqu'à reboucler sur ab..e : la période attendue est de longueur p !

{Si tout ceci vous a effrayé, reprenez le raisonnement pour les fractions à dénominateur 99, 999, 9999 etc.}

94/ On doit trouver respectivement :
3/11 107/333 527/990 739/99

95/ x est un irrationnel car son écriture décimale est illimité et non périodique.

x + 1 = 1,1020030004000050000060000007… etc. (facile)
1 - x = 0,8979969995999949999939999992… etc ? (hum ! moins facile)
2 * x = 0,2040060008000100000120000014… etc ? (hum ! pas facile).

<u>Planche MS 10</u>

∆ 43,41 ÷ 2,5 → 17,364 (=a) 25 ÷ 9 → 2,7777777778 (=b) {TI 40}
Oui a = 43,41 ÷ 2,5 Non b ≠ 25 ÷ 9

∆ Troncatures de 25 ÷ 9 au dixième : 2,7, au centième 2,77, etc : la troncature à 10^{-n} près est 2,7 … 7 avec n chiffres 7.

∆ L'arrondi à 10^{-n} près de 25 ÷ 9 est 2,7 … 78 avec n-1 chiffres 7 derrière la virgule. L'arrondi à 10^{-n} près d'un nombre est donc le décimal d'ordre n le plus proche de ce nombre.

Règle pratique : si la $n^{\text{ième}}$ décimale est inférieure à 5 on prend l'approximation par défaut (donc la troncature) sinon on prend l'approximation par excès.

96/ Troncatures (T) et arrondis (A) au dixième :

	27 ÷ 7	7 ÷ 12	$9,13^3$	87 ÷ 31	17505/2505
T	3,8	0,5	761	2,8	6,9
A	3,9	0,6	761,1	2,8	7

97/ Troncatures (T) et arrondis (A) au centième :

	0,47/3,9	0,007÷0,079	1793 ÷ 1993	$0,41^2$ x $7,28^3$
T	0,12	0,08	0,89	64,85
A	0,12	0,60,09	0,9	64,86

98/ Drongadures (T) zé arrontis (A) zo billièbe :

	a (= 9/7)	b (= $7,12^{1/2}$)	a + b	a x b
T	1,285	2,668	4,658	3,43
A	1,286	2,668	4,659	3,431
	a^2	b^2	25.a	32.b
T	1,653	7,12	32,142	85,386
A	1,653	7,12	32,143	85,387

99/ Recherches de minimum {travail sur calculette TI 40}

a =	b =	a - b =	Approx.	min
85/27	116/37	13/999	0,013	b
-102/14	-503/69	2/483	0,0041	b
1018/37	2449/89	-11/3293	-0,0033	a
-116/27	-150/35	-10/945	-0,01	a

100/ Les nombres égaux à leur troncature au dixième sont les décimaux d'ordre 1, donc de la forme n/10 , n entier naturel. Ceux égaux à leur arrondi au centième sont les décimaux d'ordre 2 donc de la forme n/100, n entier naturel. On peut tous les visualiser sur une droite numérique graduée au dixième pour les premiers et au centième pour les seconds.

101/ A la calculette, on peut travailler sur le nombre π. Son arrondi au centième est 3,14. $3{,}14^2 = 9{,}8596$, d'où un arrondi de 9,86 plus faible que celui de π^2 soit 9,87. En revanche, le calcul sur 3,141 fournira le bon arrondi au centième. Si vous n'êtes point satisfait, recommencez l'expérience avec la fraction 22/7.

Un peu plus généralement, soit n,abc un décimal et n,ab son arrondi. Si on élève au carré :

$$(n{,}abc)^2 = (n{,}ab)^2 + 2.(n{,}ab).c/1000 + (c/1000)^2$$

En remplaçant l'arrondi de $(n{,}abc)^2$ par celui de $(n{,}ab)^2$ on commet au mieux une erreur de 2.(n,ab).c/1000 qui peut dépasser le centième dès que 2.n.c dépasse 10. Pour limiter les erreurs d'arrondis, les calculettes opèrent sur 2 ou 3 chiffres significatifs supplémentaires, chiffres qui ne sont pas affichés. En revanche, la prise de racine carrée peut se faire sur un arrondi sans erreur si l'on cherche un arrondi de même précision.

102/ On note E(x) la partie entière du nombre x. La troncature au centième de x n'est rien que E(100.x)/100. L'arrondi s'obtient en ajoutant E{[E(100.x)-10.E(10.x)]/10 + 0,5}/100 (qui peut être nul) à la troncature.

Planche MS 11

103/ $13{,}5 < 13{,}568 < 13{,}6$ $285{,}2 < 285{,}23 < 285{,}3$
$0 < 4/53 < 0{,}1$ $3{,}4 < 12^{1/2} < 3{,}5$

104/ $0{,}0458 \to 0{,}05$ donc $0 < 0{,}0458 < 0{,}1$
$2589{,}4859 \to 2589{,}49$ donc $2589{,}4 < 2589{,}4859 < 2589{,}5$
$a = 9{,}057 \times 1{,}9 \to 17{,}21$ donc $17{,}2 < a < 17{,}3$

105/ 3,316 troncature de $\sqrt{11} \Rightarrow 3{,}316 \leq \sqrt{11} < 3{,}317$ On en déduit :
$72{,}952 \leq 22 \times \sqrt{11} < 72{,}974$ $0{,}4974 \leq 0{,}15 \times \sqrt{11} < 0{,}4976$
$0{,}1004 \leq \sqrt{11} \div 33 < 0{,}1006$ $0{,}00412 \leq \sqrt{11} \div 802 < 0{,}00414$

106/ 2,64 est un arrondi au centième de $\sqrt{7} \Rightarrow 2{,}635 \leq \sqrt{7} < 2{,}645$
$54{,}808 \leq 20{,}8 \times \sqrt{7} < 55{,}016$ $265{,}713 \leq 100{,}84 \times \sqrt{7} < 266{,}722$
$105{,}4 \leq \sqrt{7} \div 0{,}025 < 105{,}8$ $2{,}185 \leq \sqrt{7} \div 1{,}21 < 2{,}186$

107/ $V = \pi R^2 h$ avec R = 2,15 m h = 15,28. $3{,}1415 \leq \pi < 3{,}1425$
$R^2h = 70{,}6318$ Donc $221{,}8897 \leq V < 221{,}9605$ (en m^3) .

Un arrondi possible est 221,9250 avec une erreur possible de 0,06 m^3. Traduisant en litres (rappel 1 m3 égale 1000 litres), on obtient l'inégalité : 221 889 l < V < 221 961 l. On peut prendre 221 925 l comme arrondi (à 35 l près environ).

En prenant 3,14 comme troncature au centième, on perd encore en précision : $3,14 \leq \pi < 3,15 \Rightarrow 221,7838 < V < 222,4901$. En litres on trouve un volume de 222 136 avec une erreur de près de 350 litres (environ 16 %).

Planche MS 12

108/ Seule la dernière équation $(3x-1)(x-3) + 2x = x^2-9$ n'est pas du premier degré.

109/ Pour les trois autres, voici leur solution respective :
$x = - 3/2$ $x = 23^2/2.12^2 = 529/288 \cong 1,8368$ $x = 8,4/16,8 = 0,5$

110/ R + U + P = 150 ; R = 35 + U ; U = P ÷ 3 Système de 3 équations à trois inconnues, qui admet comme seule solution :
R = 58U = 23 P = 69

111/ Mon septième plus mon neuvième vaut cent de moins que mon tiers. Donc : $n/7 + n/9 = - 100 + n/3 \Leftrightarrow 5.n = 9.7.100$ n=1260

112/ Long = 3.larg ; (Long + 15)(larg + 15) = Long.larg + 2625 Donc : Long = 3.larg et Long + larg = 160 Long = 120 larg = 40

113/ $(a + 8)^2 = a^2 + 704 \Leftrightarrow 2.a + 64 = 704$ a = 320

114/ A priori pas d'équation en jeu : $17^2 + 111 = 400 = 20^2$. Une solution consiste à augmenter les cotes du carré de 3 m. Mais est-ce la seule ? On pourrait déformer le carré en rectangle…

115/ • Une fois : La note s'élève à 72 x 18 = 1296 F ; 14 convives payent : 1296 = 92 x 14 + 8 : vraisemblablement, chacun d'eux paiera 20,50 F avec un excédent de 1 F !
- Une autre fois : 14 x 12 = 4 x repas ⇒ repas = 52 F
- Variante : 72 x 4 = 8 x convives ⇒ convives = 36
- V^{te} encore : 18 x 50 = (18 - étourdis) x 60 ⇒ étourdis = 3

116/ On appelle n le naturel au centre de la série de x entiers consécutifs, x impair. Pour x = 3 : 120 = (n-1) + n + (n+1) d'où n = 40 ; la série est 39, 40 ,41 ; pour x = 5 on peut écrire 120 = (n-2) + (n-1) + n + (n+1) + (n+2) ⇒ n = 24 ; la série est alors 22, 23, 24, 25, 26 .

Planche MS 13

117/ i) x = 55/14
ii) L'équation se transforme facilement en (x + 1)(2x -1) = 0 dont on déduit les deux solutions : x = -1 et x = 1/2.
iii) Pas de solution (x = 5/3 annule le dénominateur!)
iv) x = -5/2
v) On doit lever la valeur absolue.
Cas 1 : $x < 2/3 \Leftrightarrow 3x -2 < 0 \Rightarrow -(3x - 2) = 7x - 21$
on trouve x = 23/10 qui viole l'inégalité x < 2/3
Cas 2 : $x \geq 2/3 \Leftrightarrow 3x -2 \geq 0 \Rightarrow 3x - 2 = 7x - 21$

on trouve x = 19/4 (> 2/3) C'est donc la solution.
Extension du procédé au n° suivant !

vi) On doit lever deux valeurs absolues, d'où le tableau :

$x \le -2$	$2 < x \le 4$	$4 < x$
$\|3x + 6\| = -3x - 6$	$\|3x + 6\| = 3x + 6$	$\|3x + 6\| = 3x + 6$
$\|x - 4\| = -x + 4$	$\|x - 4\| = -x + 4$	$\|x - 4\| = x - 4$
$-10 = 2x \Rightarrow$ **x = -5**	2x = - 2 Pas de sol	2x = -10 pas de sol

118/ {x = 17/26 y = 16/13} {x = -23/6 y = -17} {infinité de sols}

119/ Premier système (avec les racines) : on opère le changement de variables $X = \sqrt{x}$ $Y = \sqrt{y}$. On peut réécrire le système en :

$$\begin{cases} \sqrt{2}.X + 2.Y + 1 = 0 \\ \sqrt{7}.X + \sqrt{14}.Y + 2 = 0 \end{cases}$$

Il est facile de voir que ce système n'admet pas de solution car $\sqrt{7}$ et $\sqrt{14}$ sont proportionnels à $\sqrt{2}$ et 2 selon un facteur de $\sqrt{7}/\sqrt{2}$, ce qui n'est pas le cas des constantes 2 vs 1.

Second système (avec les valeurs absolues) : on doit lever les valeurs absolues en considérant 9 cas selon la position de x relativement à -1 et 1 d'une part, de y relativement à -2 et 2 d'autre part. D'où 9 systèmes partiels. On trouve finalement 2 couples solutions {x = 0 ; y = 4} et {x = 3 ; y = 1}.

120/
$$\begin{cases} U + R = 100 \\ U - R = 24 \end{cases}$$
U = 62 R = 38

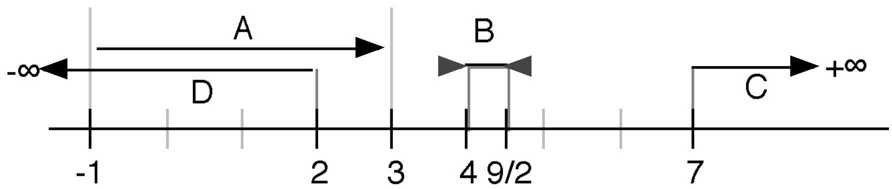
121/
$$\begin{cases} 2.P + 1.B = 14{,}40 \\ 1.P + 2.B = 14{,}40 - 2{,}00 + 0{,}20 = 12{,}60 \end{cases}$$
Prix du pain : 5,40 de la baguette : 3,60.

122/
$$\begin{cases} \text{Toto} - \text{PasToto} = -2 \\ 2.\text{Toto} - \text{PasToto} = 3 \end{cases}$$
Toto en a 5 et PasToto en a 7.

123/
$$\begin{cases} 1.\text{Pain} + 0.\text{Croissant} + 1.\text{Brioche} = 3 \\ 1.\text{Pain} + 1.\text{Croissant} + 0.\text{Brioche} = 2{,}80 \\ 0.\text{Pain} + 1.\text{Croissant} + 1.\text{Brioche} = 2{,}40 \end{cases}$$
Pain au chocolat = 1,70 croissant = 1,30 brioche = 1,10
Notre héros devra se contenter d'un croissant.

Planche MS 14

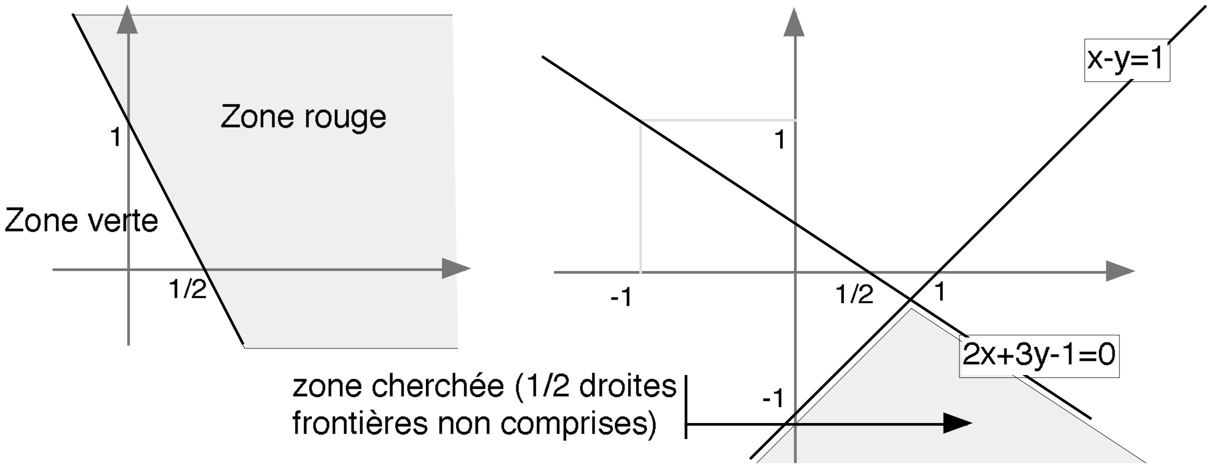
124/ Représentation attendue :



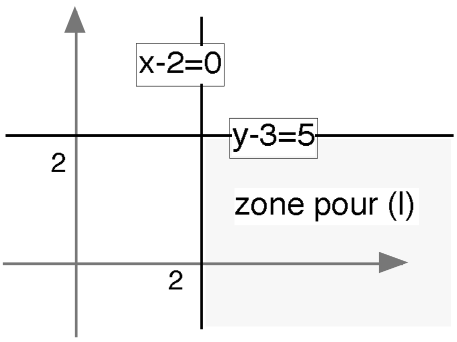
125/ On se contente de pointer d'éventuels pièges. Pour l'obtention de F, bien faire tomber le carré : $x^2 < 9 \Leftrightarrow x > -3$ et $x < 3$; donc F =]-3 3[. Pour visualiser G, commencer par traduire la valeur absolue : $|x - 3] = x - 3$ si $x \ge 3$, $|x - 3| = -x + 3$ si $x \le 3$ (et dans ce cas attention $-x < -2 \Leftrightarrow x > 2$). Donc G n'est rien que l'intervalle ouvert]2 4[.

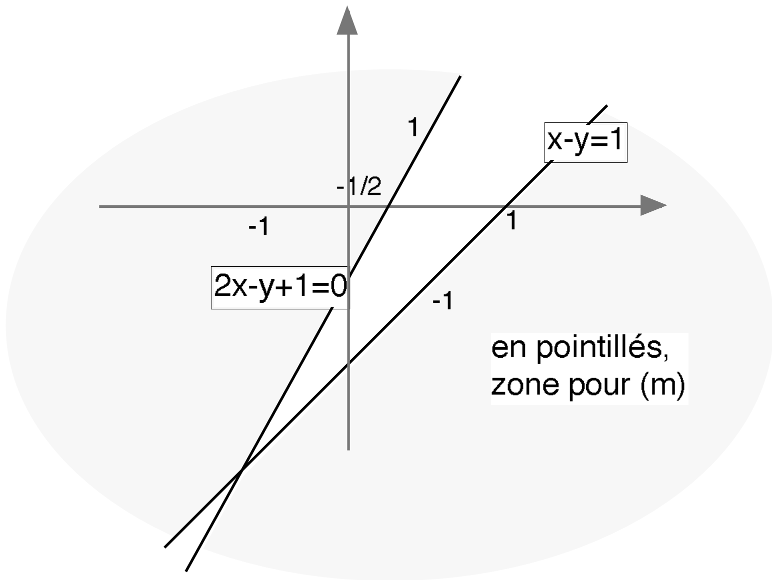
126/ (h) $x \in$]3/2 +∞[(i) $x \in$]-2 +∞[(j) $x \in$]-∞ 1/4 $\cup$ [3/2 +∞[

127/ Sublime coloriage demandé, ci-dessous à gauche :

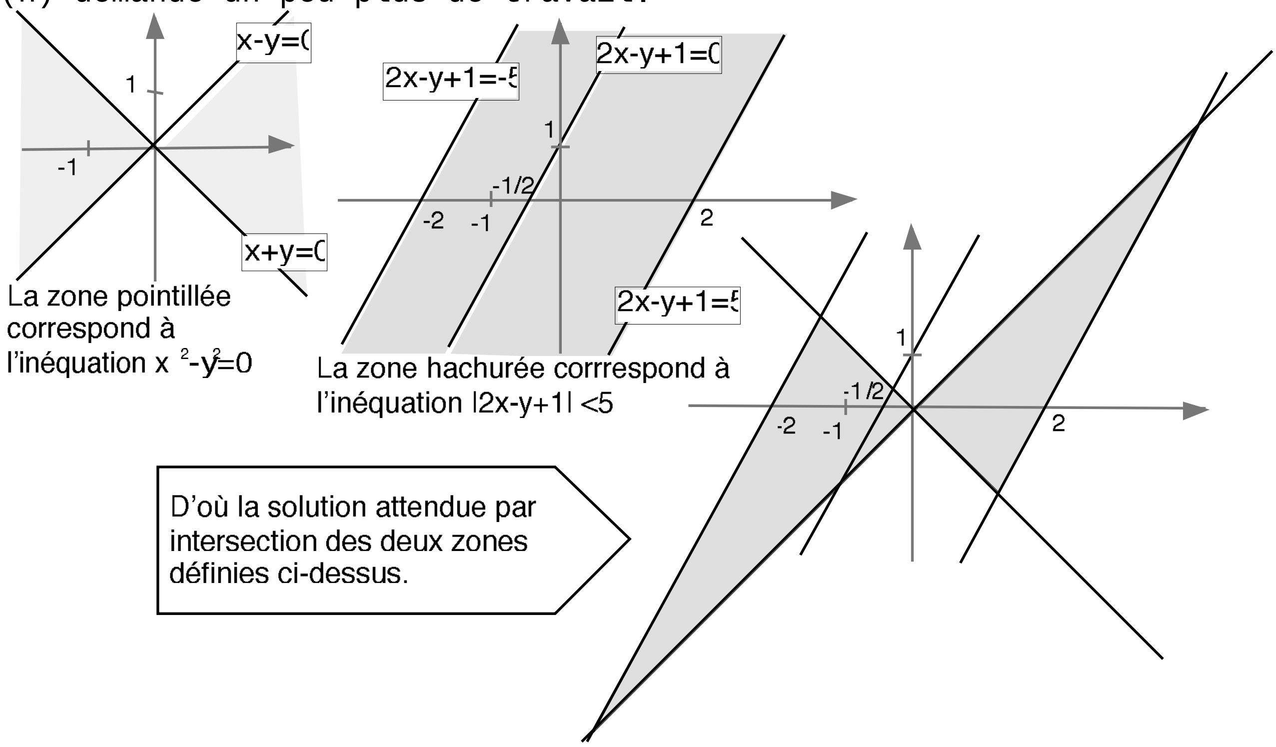


128/ Réponses pour (k)ci-dessus à droite, pour (l)et (m)ci-dessous.





(n) demande un peu plus de travail.



129/ La figure ci-dessous offre une réponse possible :

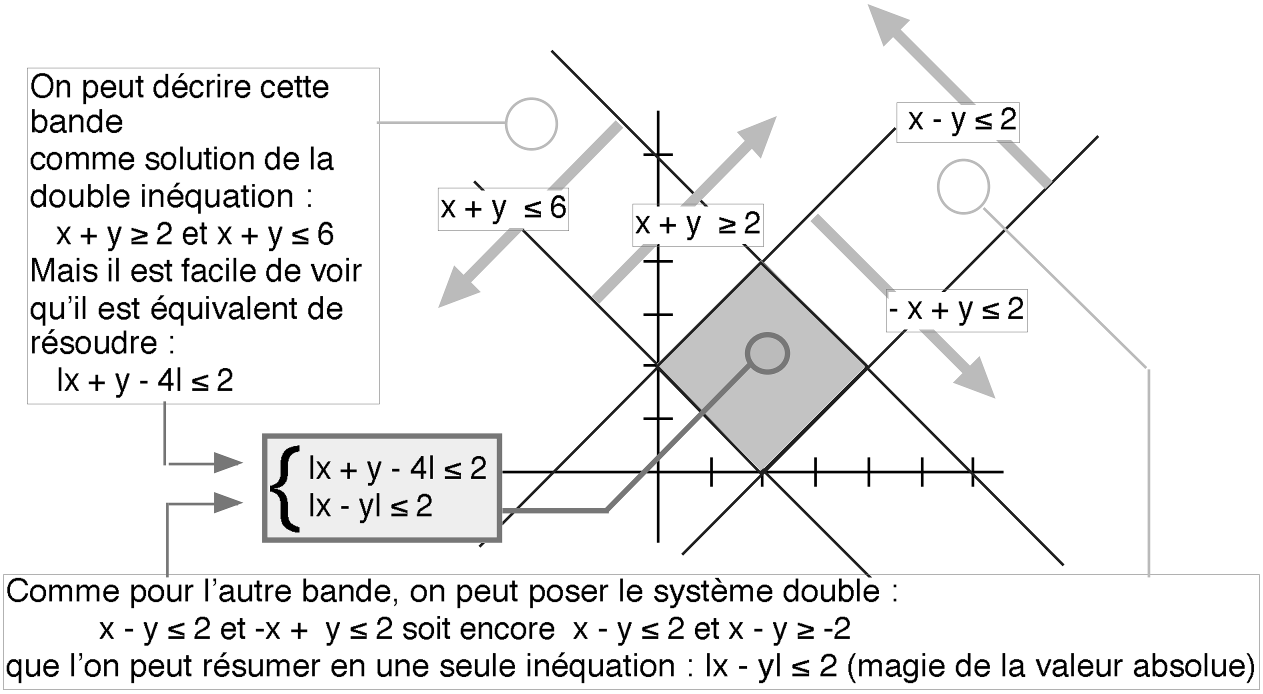


Planche MS 15

130/ Conseil : modifier l'affichage en ordonnées en étalant le segment [250,350] sur l'empan initial 0 ↔ 350. La précision sera au minimum triplée. La tendance qui s'en dégage est une baisse d'activités en été, opposée à une forte demande en février. On ne reproduit pas ici le graphique corrigé.

131/ Calcul des écarts :

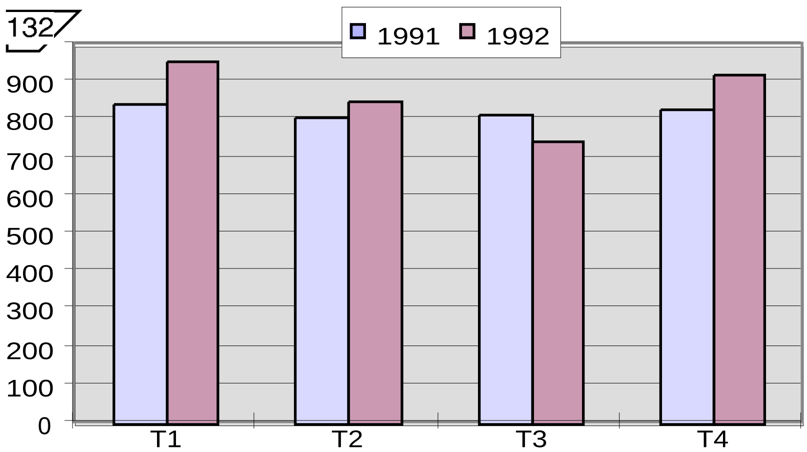
Pour l'année 1991 (Moyenne : 275)

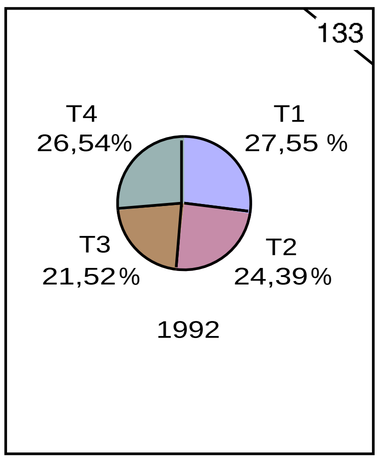
M	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
∂	-25	35	10	5	-5	-15	-10	-10	15	0	-10	15

Pour l'année 1992 (Moyenne : 290)

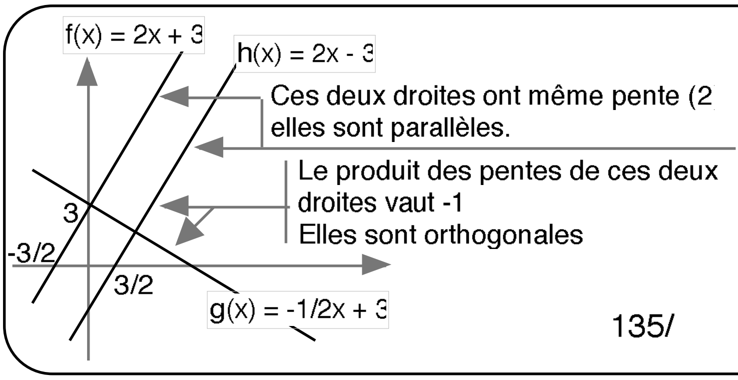
M	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
∂	20	60	10	30	-20	-30	-40	-40	-40	-15	10	60

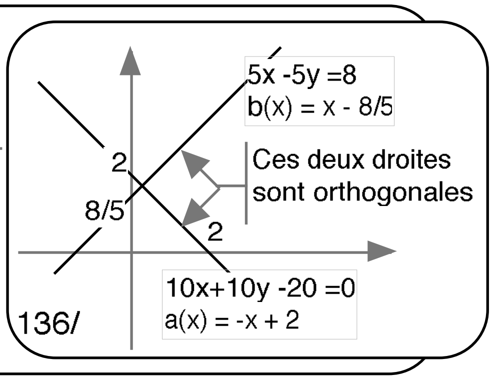
132 et 133/ J'espère que les deux images ci-dessous suffisent (Pour 133, seule 1992 est de quelque intérêt).





134/ Problème classique de lecture : on est obligé d'arrondir (comment?) diverses valeurs prélevées. Sinon pas de difficulté réelle. On aura noté que cet importateur ferme en Août.



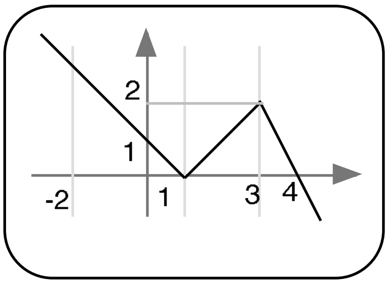


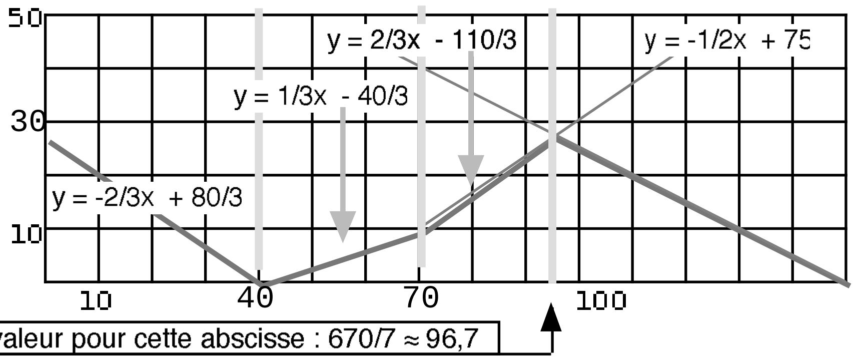
137/ Attention au piège : la taille du marin est sans importance (il peut toujours nager) ; en revanche la hauteur sous barrot est fondamentale, car passée cette valeur, le bateau coule. Comme le texte n’indique pas cette hauteur, on ne peut que construire la courbe de la fonction DégatDesEaux(t) en fonction du temps : DégatDesEaux(t)= 0,12 * t - 1 . Le lecteur vérifiera que pour t = 8, DégatDesEaux vaut bien 0,95 m. Le lecteur pourra aussi constater que l’eau n’a pas fait irruption, en tout cas à pleins flots, dès le début.

138/ Le graphique est une droite d’équation Polu(t) = -20.t +1250, t exprimé en minutes et Polu en litres.

139/ P = F + 26

140/ Pour la valeur absolue, bien scinder l’intervalle [-2 3] ; x∈[-2 1] f(x)=-x+1 x∈[1 3] f(x)=x-1. Cf. ci-dessous à gauche.





141/ Pour traiter aisément l’exercice, il convient de prolonger certains segments. Esquisse de solution ci-dessus à droite.

Planche MS 17

142/ Quelque soit le repère, les points (x,y) sont alignés. Si on choisit 12u+32v en x, on prendra 9u+24v en y pour respecter l’alignement. il est facile de repérer que le coefficient de proportionnalité (par exemple 9/12 = 3/4) n’est rien que la pente de la droite supportant tous ces points.

143/ Les complétions demandées sont marquées en gras.

56	35	77	**75**	**10,5**	-6,3
40	25	**55**	105	7,5	**-4,5**

2,5	**-35**	15	115	**1**
3,5	-49	21	**161**	1,4

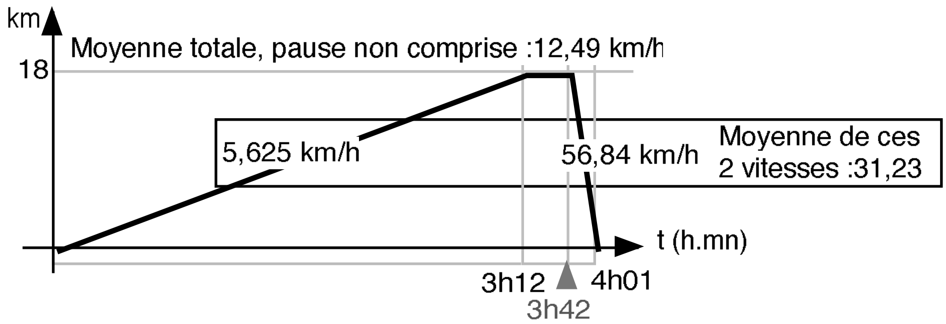
144/ (150, 72, 48) → (25, 12, 8)   (2/3, 4/9, 5) → (6, 4, 45)

(4/7, 2, 6/7) → (14, 7, 21)

145/ 3 + 4 + 5 = 12 ; 60 ÷ 12 = 5 Donc on prend (15, 20, 25). de même on prend (75, -60, 45) proportionnels à (5, -4, 3).

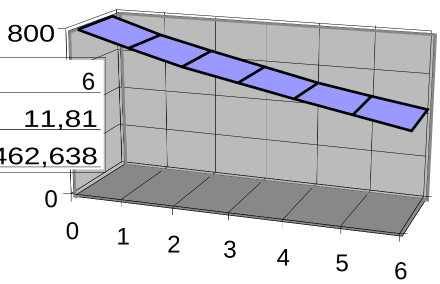
146/ A 120 km/h 50 km → 25 mn ; 120 km → 1 h ; 320 km → 2h40
1h15 ← 150 km ; 3h20 ← 400 km.

147/ Le but de cet exercice est simplement de rappeler qu'une vitesse moyenne sur un long parcours ne peut s'obtenir comme moyenne de vitesses sur divers tronçons de ce parcours. Voici simplement le chronogramme demandé :



148/ Hommage (hum!) aux problèmes de robinets de mon enfance. Le premier travail consiste à remplir un tableau. Ici et maintenant : un tableur (Excel, ClarisWorks) facilite l'opus. Dans un deuxième temps, on trace la courbe demandée (ici, via le tableur susmentionné).

Heures Ki Pass	0	1	2	3	4	5	6
Débit (l/s)	0	20	18	16,2	14,58	13,12	11,81
Volume en m3	800	728	663	604,88	552,392	505,153	462,638



Bien entendu, le débit moyen de la vanne varie en fonction du temps (cette variation n'est certainement pas linéaire). On peut donc se poser la question de la signification du débit moyen de la vanne soit 15,62l/h, calculée sur les 6 premières heures : Une question plus intéressante, non posée, serait de savoir au bout de combien de temps, la cuve serait vide! On se contente d'indiquer ici, qu'à la trentième heure, il reste plus de 110 m^3 dans la citerne, tandis que le débit est tombé en dessous du litre par seconde. En fait le modèle proposé est certainement discutable, car le débit moyen s'étiolant de plus en plus, la citerne n'en finit pas de ne pas se vider !

149/ Premier tour : candidat sortant = 42,33 % des suffrages (SoS 62 % d'abstention). Second tour : 67,67 % pour ce candidat, donc réélu (43 % d'abstention -c'est pas encore le Pérou). Bref, le nombre de suffrages exprimés augmente de 48 %, celui des électeurs pour le vainqueur final de 56 %, et l'abstention recule de 30 % environ).

150/ 1890 F. → 1575 F. Pourcentage de baisse = 16,6 % environ.
Hausse de TVA : 20,6 % → 33 %. Je laisse le lecteur vérifier que la hausse relative du coût est de 12,4/120,6 soit 10,28 %.

151/ Il faut extraire au moins 5798 tonnes de minerai pour être sur de disposer de 4000 tonnes de fer.

Notes Personnelles

Notes Personnelles