Le Théorème de Pythagore

Triades pythagoriciennes

Définitions : on appelle triade la donnée de trois nombres entiers. Ex : (3, 5, 11). On a l'habitude d'ordonner les composants de la triade mais ce n'est pas une obligation.
On dit qu'une triade (p, q, r) est une triade pythagoricienne si le carré de l'un est égal à la somme des carrés des deux autres. Ex : (3, 4, 5)

Recherches

1/ Vérifier que (6, 8, 10), (5, 12, 13), (10, 24, 26) sont bien des triades pythagoriciennes.
2/ Vérifier que si (p, q, r) est une triade pythagoricienne, alors (kp, kq, kr) où k est un entier en est aussi une. On note aussi bien k(p, q, r). On définit ainsi la notion de triade irréductible.
3/ Dorénavant, on fabrique des triades ainsi :

- On choisit deux entiers positifs x > y
- On calcule $p = 2xy$ $q = x^2 - y^2$ $r = x^2 + y^2$

Montrer que la triade (p, q, r) est pythagoricienne.

On acceptera la réciproque : toute triade est de la forme k(p, q, r) où p, q, r sont engendrés comme dans la question 3.

4/ Quelle est la plus petite triade pythagoricienne ?
5/ Quelle est la plus grande triade pythagoricienne dont les termes sont tous inférieurs à 20 ?
6/ Peut-on trouver des triades pythagoriciennes de la forme (n, n, m) ?
7/ Les mesures d'un triangle constituent une triade pythagoricienne. Que peut-on dire de ce triangle ? Peut-on trouver un triangle rectangle isocèle à côtes entières ?
8/ Quel est le triangle rectangle à côtes entières dont le périmètre est inférieur à 100 ?
Il pourra être utile de constituer un tableau du genre :

x >	y	Z(>=1)	p = 2xyz	$q = (x^2 - y^2)z$	$r = (x^2 + y^2)z$

Tableau que l'on ordonnera selon les valeurs de p puis de q.

Trouvé sur http://www.ilemaths.net

Exercice 1

Compléter avec des entiers :
$\sqrt{16}$= ...... ; $\sqrt{225}$= ...... ; 17 = $\sqrt{.....}$; $\sqrt{318784^2}$= ...... ; 900 = $\sqrt{.....}$; $(\sqrt{3})^2$= ....

Exercice 2

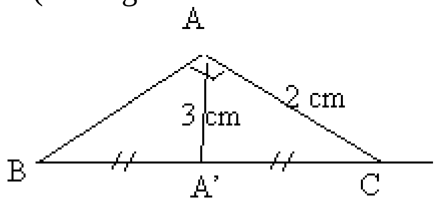
Tracer un triangle IKS rectangle en S.
Marquer M, pied de la hauteur relative à l'hypoténuse.
Ecrire la relation de Pythagore dans chacun des triangles IKS, SMK et IMS.
Ajouté par moi : En déduire une relation entre la hauteur et la division de l'hypothénuse qu'elle induit.

Exercice 3

Calculer la longueur des diagonales d'un rectangle RSTU de dimensions 13 cm et 8 cm.

Exercice 4

1. Tracer un triangle IJK rectangle en I tel que IK = 2,8 cm et IJ = 2 cm. Soit M le milieu de [JK]. Calculer IM.
2. Calculer l'aire du triangle ABC (voir figure à main levée ci-dessous) :



Exercice 5

Une corde est tendue entre deux points A et B distants d'une longueur d (en mètres).
On la remplace par une corde plus longue de 1 m que l'on tire perpendiculairement au milieu I de [AB], de façon qu'elle demeure tendue.
(On appelle «flèche» la longueur IJ).
1. Répondre de façon intuitive aux deux questions suivantes :
a) La flèche est-elle plus grande pour AB = 100 m ou pour AB = 10 m ?
b) Lorsque AB = 100 m, la flèche mesure environ :
1 cm ; 20 cm ; 1 m ; 7 m.
2. Calculer IJ pour AB = 100 et AB = 10 et comparer avec la réponse spontanée.

Exercice 6

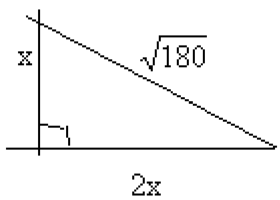
1. a) Construire un triangle RST rectangle en R, inscrit dans un cercle de 5 cm de rayon et tel que RS = 35 mm.
b) Calculer l'aire et le périmètre de ce triangle.
2. Construire un rectangle ABCD inscrit dans un cercle de rayon 2,6 cm et tel que : AB = 4,8 cm. Calculer l'aire et le périmètre de ce rectangle.

Exercice 7

Construire un trapèze rectangle ABCD (sommets de l'angle droit en A et D tels que :
AD = 4,1 cm ; AC= 11,3 cm et DB = 7,4 cm.
Calculer son aire.

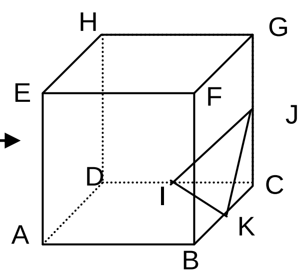
Exercice 8

Trouver x.



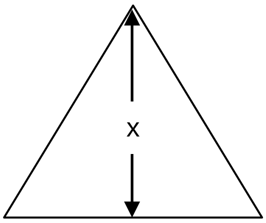
Exercice 9

On considère un cube de 5 cm pour arête.
Soient I, J et K les milieux respectifs des arêtes [CD], [CB] et [CG].
Calculer le périmètre et l'aire du triangle IJK.

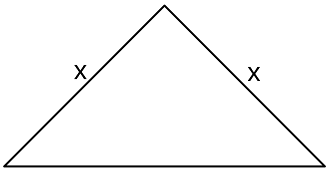


Petits rajouts

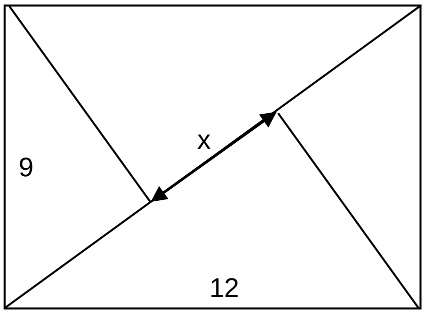
Trouver x dans les figures ci-dessous.



Le triangle est équilatéral
de coté 10 cm



Le triangle est rectangle
isocèle d'hypothénuse 10 cm



√2 n'est pas un rationnel / preuve par l'absurde.

On pose l'hypothèse $(\mathcal{H})$ suivante :

$(\mathcal{H})$ ∃ (m,n) ∈ ℵ x ℵ tq m/n est irréductible et √2 = m/n

L'hypothèse $(\mathcal{H})$ entraine ipso facto :

$(\mathcal{C})$ il n'existe pas de couple d'entiers (m',n') tel que m'<m, n'<n, et √2 = m/n.

Principe de la preuve : on met en défaut $(\mathcal{C})$ et donc $(\mathcal{H})$.

1/ On suppose l'existence du couple d'entiers (m,n) satisfaisant $(\mathcal{H})$. On appelle ABC le triangle isocèle en A tel que : AB=AC=n, BC=m.

Montrer que du fait de $(\mathcal{H})$, ABC est rectangle en A.

2/ On appelle K le point d'intersection du segment AC et de la bissectrice intérieure de l'angle ^ABC. On appelle H le projeté orthogonal de K sur le segment [BC].

Précisez les mesures des angles ^ABK, ^AKB, ^BKH, ^HKC.

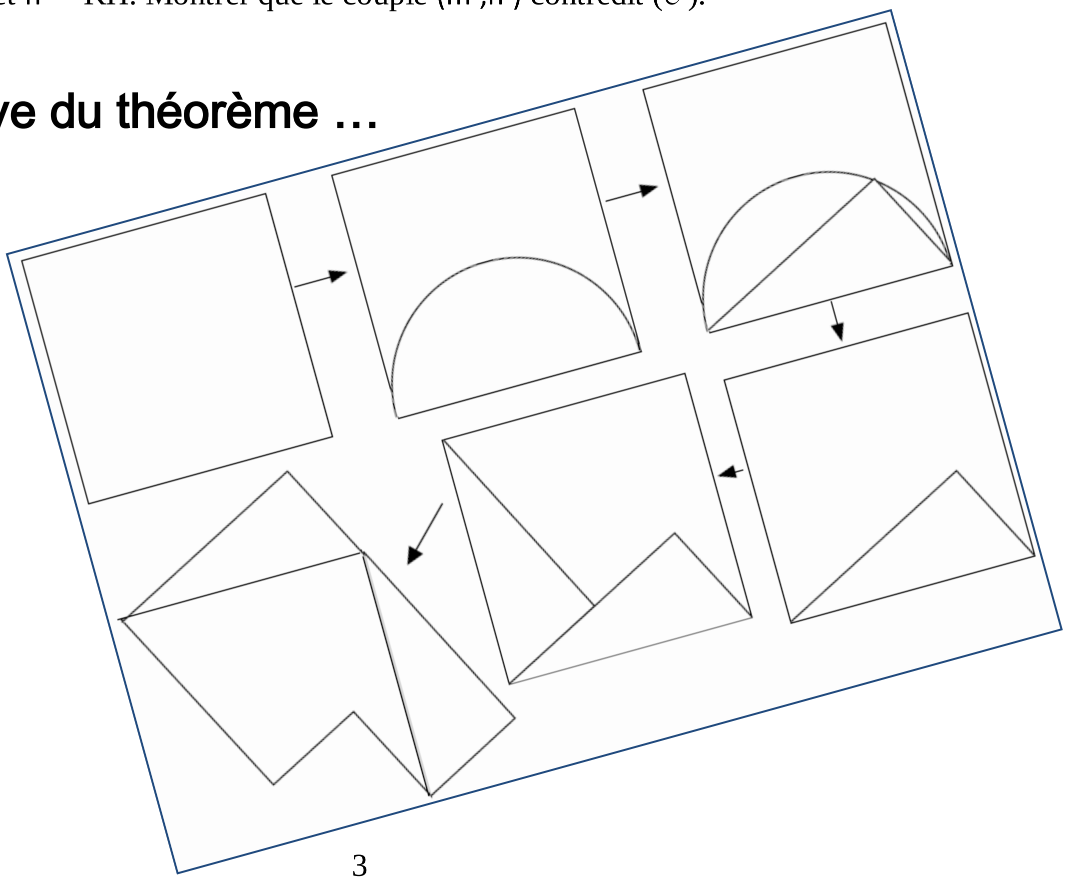
3/ Précisez les longueurs des segments [BH] puis [HC] en fonction de m et n.

4/ Nature du triangle KHC ? En déduire la longueur des segments [AK] et [KH] puis [KC].

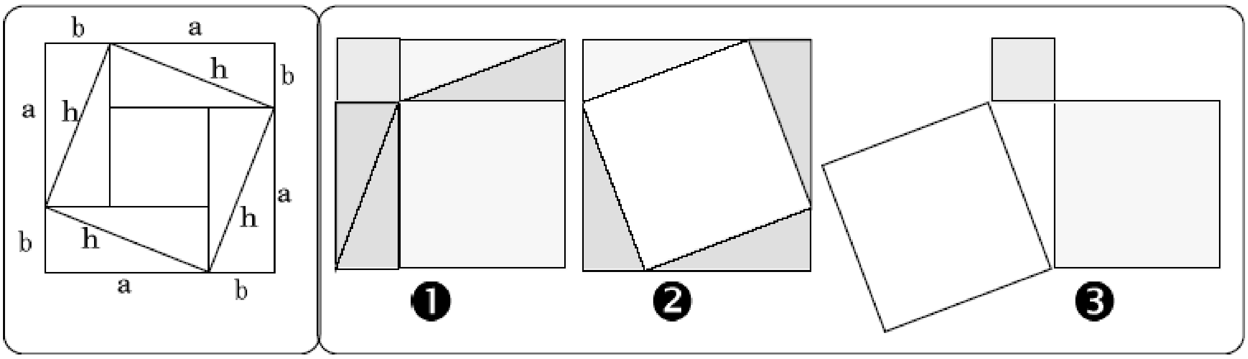
5/ On pose m'= KC et n' = KH. Montrer que le couple (m',n') contredit $(\mathcal{C})$.

6/ Conclure.

Une preuve du théorème …



Une seconde preuve



Une tierce preuve