

Fiche n°10

Situation 32 : vrai dans les deux cas. Vrai problème maintenant : ces 4 bissectrices laissent apparaître un quadrilatère au centre de la figure. Nature de ce quadrilatère ? Peut-il être un carré ?

Situation 33 : faux. Devient vrai quand on repousse un sommet à l'infini ...

Situation 34 : utiliser les données pour calculer $\angle IBA$. Cet exercice suppose pas mal de connaissances sur la géométrie du triangle.

Situation 35 : O est à égale distance des droites (AB), (BC), (DC), doncla droite (OO') est parallèle aux deux bases.

Fiche n°11

Situation 36 : admet deux solutions. Sol 1 : on connaît le théorème de la droite des milieux, on peut alors produire J milieu de [AB] puis K milieu du troisième coté incomplet. Le cartouche permet de tracer les parallèles nécessaires. Sol 2 : on trace la médiatrice en I au segment [AC], puis celle du segment [AB]. Le cartouche laisse assez de place pour ces opérations. Ne reste plus qu'à projeter orthogonalement le point d'intersection de ces deux médiatrices sur le coté [BC] incomplet.

Situation 37 : Dans la figure de gauche, le triangle d'angle $\angle \theta$ est isocèle (pourquoi au fait ?). Noter aussi que la base de ce triangle isocèle est parallèle à la bissectrice intérieure de l'angle $\angle 2\theta$. D'où la construction demandée pour la figure de droite. Tracer la bissectrice interne de l'angle $\angle CAB$. Marquer E son intersection avec (BC). Tracer la parallèle passant par C à (AE) et marquer D son intersection avec (AB).

Situation 38 : cercle circonscrit vs cercle inscrit pour la devinette. Retrouver le triangle est difficile a priori. Ici, il semble qu'en tâtonnant on y arrive.

Situation 39 : pas de problème ici en revanche.

Fiche n°12

Situation 40 : a) les angles $\angle MBN$ et $\angle MCP$ sont égaux par définition du triangle ABC, donc aussi les angles $\angle NMB$ et $\angle CMP$ (car complémentaires des premiers) et donc aussi, et enfin, les angles $\angle CMP$ et $\angle CMQ$. b) Le triangle MQC est donc égal au triangle MPC donc lui aussi rectangle. c) la droite (QC) n'est rien que la parallèle passant C à la droite (AB). Sa distance à (AB), constante et égale à la hauteur issue de C dans le triangle ABC- réalise la somme des distances de M aux droites (AB) et (AC). Nota : cette situation n'est qu'un prélude à :

Situation 41 : En appelant $\Sigma(\Omega)$ la somme de ses distances aux trois cotés du triangle équilatéral ABC, on montre facilement que cette somme est constante. On choisit à l'intérieur du triangle un point Ω' quelconque mais différent de Ω . Il suffit de considérer le point Ω'' intersection de la parallèle à (BC) menée par Ω et de la parallèle à (AB) menée par Ω' . {Ce point est revanche particulier puisqu'il dépend des deux autres points Ω et Ω' .} En s'appuyant deux fois sur la situation 40, on établit l'égalité de $\Sigma(\Omega)$ et de $\Sigma(\Omega'')$, puis de $\Sigma(\Omega'')$ et de $\Sigma(\Omega')$. Donc $\Sigma(\Omega)$ ne dépend pas du point Ω . Cette somme est égale à la longueur d'une hauteur donc à $\sqrt{3}/2$ fois le coté.

db à VdB

Problèmes simples de distance * Quelques commentaires

Préambule

Dans le document éponyme, nous travaillons autour de la notion de distance entre deux points. Il est considéré que la géométrie que nous allons pratiquer porte sur des ensembles plans d'éléments appelés points. Aucune définition théorique de la notion de plan ne sera donnée ici. On accepte l'entendement commun d'étendue infinie à deux dimensions. On accepte aussi que les points puissent se structurer en formes repérables et nommables : segments, droites, cercles, polygones, etc. On accepte aussi les qualités habituelles, parallélisme, orthogonalité.

De la même façon, nous acceptons qu'il est toujours possible de mesurer une distance entre deux points ; d'ailleurs nous acceptons que les menées concrètes avec son double-décimètre soient un reflet acceptable de démarches théoriques. Dire ceci n'est pas l'acceptation d'une quelconque dictature du Voir sur le Savoir, mais nous ne pensons pas utile de reconstruire la géométrie classique à partir du point d'entrée d'une métrique.

Dans ce qui suit, nous donnons quelques indications sur les réponses attendues par les 6 fiches.

Fiche n°1

Fiche dédiée à la notion de distance entre 2 points, concrétisation : cercle de centre et rayon donnés.

Situation 1 : appel à la règle pour poser des points respectant les clauses ; puis du compas. 2 cercles ne se coupant pas apparaissent progressivement. On note que les points rouges sont tous plus près de B que de A ...

Situation 2 : même travail a priori ; les mesures ayant changé, certains points rouges seront plus près de A que de B, contrairement à la première situation. D'ailleurs deux points respectent les clauses et doivent être colorés en bleu et en rouge ! Ils sont équidistants des points A et B.

Situation 3 : saut épistémologique. La question est de trouver la valeur de x pour que la situation soit identique à la première situation et pas à la seconde. La réponse passe par la mesure théorique de la longueur du segment [AB]. En pratique $x < 3,1$ est acceptable.

Fiche n°2

Cette fiche est dédiée à l'idée de triangulation.

Situation 4 : les points demandés s'obtiennent comme intersection d'ensembles de points à une distance donnée de points donnés, id est des cercles de centres respectifs A et B et rayons 2 cm et 5 cm. Ces points existent car la somme des rayons est supérieure à la longueur du segment joignant les centres.

Situation 5 : échec ici car l'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée.

Situation 6 : recherche modélisante. Il suffit de choisir x et y tels que : $x + y \geq \text{long}([AB])$ pour que l'on puisse trouver des points répondant aux clauses.

Application impromptue (hors fiches). Parmi les triplets suivants, quels sont ceux correspondant aux mesures des cotés d'un triangle : (3, 4, 5) ; (5, 3, 7) ; (3, 4, 8) ; (15, 6, 8).

Fiche n°3

Autour de la notion «être plus près d'un point que d'un autre». L'outil fondamental reste le cercle de centre et rayon donné, mais on en considère maintenant l'intérieur ou l'extérieur.

Situation 7 : la solution consiste en l'intersection de 2 couronnes centrées respectivement en A et B. Faire attention à la locution *plus près de ... que ...* ; Ne pas confondre avec *plus près de ... que de ...* qui viendra à la situation suivante.

Situation 8 : on essaye d'installer la notion *être plus près de ... que de ...* prélude à la notion de médiatrice. On renforce l'étayage avec la situation 9.

Situation 9 : insister ici sur la clause *aussi près de ... que de ...* en faisant concrétiser au compas (Cf. fiche 2) ; on doit monter progressivement la médiatrice. Une monstration avec Cabri ou équivalent serait bienvenue ici.

Institutionnalisation : définition de la médiatrice comme solution d'un problème d'équidistance. On peut ici en profiter pour énoncer le protocole classique d'obtention (sans attendre la fiche 5) et les propriétés habituelles (droite perpendiculaire au segment en son milieu).

Fiche n°4

Situation 10 : Réinvestissement de la situation précédente avec un double zonage et recherche de l'intersection. On peut demander aux étudiants de compléter le zonage.

Situation 11 : trois médiatrices sont attendues d'où une intersection de zones offrant la réponse.

Situation 12 : suite du problème précédent, mais en s'intéressant à un point *extérieur*. Attention aux implicites malvenus : certains étudiants voudront travailler à l'intérieur du triangle ABC, contre la consigne en quelque sorte. On peut prolonger la situation en s'intéressant au zonage proximal de 4 points disposés de tel sorte qu'aucun d'eux ne soit à l'intérieur du triangle défini par les trois autres.

Fiche n°5

Assez scolaire, sauf pour la situation 14 vraisemblablement.

Situation 13 : utile uniquement pour vérifier la qualité des tracés.

Situation 14 : dans la série *Cherchez la variable didactique ...*

Situation 15 : un mix d'application de la définition de la médiatrice donnée à l'issue de la fiche n°3 et des propriétés de la dame. Faire expliciter le fait que les médiatrices dans un triangle sont concurrentes. Extension de ce repérage à la fin de la fiche n°6.

Fiche n°6

Retombées évidentes des traitements précédents.

Situation 16 : cercle circonscrit au triangle dont le centre est obtenu comme intersection de 2 médiatrices (insister sur le fait que 2 suffisent).

Situation 17 : recherche du centre en inscrivant dans le cercle un triangle. Les deux situations sont donc duelles. Le faire apparaître.

Situation 18 : la médiatrice comme outil et plus du tout objet d'apprentissage.

Fiche n°7

Autant la notion de distance entre 2 points est assez intuitive, autant celle qui vient est plus délicate.

Situation 19 et 20 : deux situations vécues, que l'on peut modéliser par le problème du plus court chemin d'un point à une droite. Les situations suivantes permettent de définir puis stabiliser la notion.

Situation 21 : relation entre tangence du cercle, rayon et distance du centre du cercle à sa projection orthogonale sur la droite. Il est intéressant de faire appel à l'inégalité triangulaire pour comparer la distance du centre à ses intersections avec la droite et à sa projection orthogonale sur icelle.

Situation 22 : la distance du centre du cercle à sa projection orthogonale ne variant pas ...

Situation 23 : voici enfin la construction de la notion de distance d'un point à une droite. Il s'agit donc d'une notion dérivée, pas d'une notion première.

Situation 24 : où l'on s'approche de la notion d'équidistance d'un point mais vis à vis de deux droites. C'est le pendant de la situation 9 fiche n°3.

Fiche n°8

Situation 25 : réinvestissement de la notion de distance d'un point à une droite. Comparer avec 22. Attention au piège : la solution attendue n'est pas nécessairement du même côté que le point A.

Situation 26 : variante de 25. Attention à la consigne. Risque de contresens.

Situation 27 : à comparer avec 24. On s'engage vers la problématisation "être plus près d'une droite que d'une autre", pendant de celle ayant débouché sur la notion de médiatrice.

Fiche n°9

Situation 28 : nommer sur la figure les points d'intersection des arcs de cercle avec (δ) et (δ') par exemple α, β sur (δ) et α', β' sur (δ') . La droite $(\omega\eta)$ est médiatrice du segment $[\alpha \alpha']$ donc axe de symétrie. Les angles $\langle \beta \alpha \eta \rangle$ et $\langle \beta' \alpha' \eta \rangle$ sont donc égaux. On en déduit facilement que les triangles $\alpha\beta\eta$ et $\alpha'\beta'\eta$ sont égaux, donc leurs hauteurs, donc les distances de η à (δ) et (δ') . On retrouve et justifie ainsi la construction de la bissectrice intérieure enseignée dès l'école primaire.

Situation 29 : construction d'une bissectrice d'un secteur de sommet inaccessible. On doit accepter que (BE) est bissectrice dans le triangle ABC. On en déduit que les angles $\langle SEB \rangle$ et $\langle SBE \rangle$ sont égaux (ils valent tous deux un droit moins le demi-angle $\langle ABE \rangle$). A partir de là, deux lectures de la figure sont possibles. Lecture 1 : le trait tracé de S semble-t-il à I représente la droite (SI) . Alors les triangles SEI et SBI sont égaux, donc les angles $\langle SIE \rangle$ et $\langle SIB \rangle$ sont égaux donc à un droit : la droite (SI) est hauteur donc bissectrice dans le triangle SBE isocèle. Lecture 2 : le trait tracé de S semble-t-il à I représente la perpendiculaire à $[BE]$ en I. Alors il s'agit de la médiatrice de ce segment, base d'un triangle isocèle. Donc c'est aussi une bissectrice. Quelle que soit la lecture adoptée, on obtient la conclusion voulue.

La situation 29 amène sans doute à évoquer les différentes droites typiques du triangle. Cf.38 et 39.

Situation 30 : application classique parmi les classiques des 2 notions rencontrées précédemment.

Situation 31 : nouvelle application, plus abstraite que la précédente. a) D est plus près de A que de B et c'est l'inverse pour C. Donc D et C ne sont pas du même côté de la médiatrice du segment $[AB]$ ce qui entraîne que le segment $[DC]$ coupe obligatoirement cette médiatrice en un point M_0 ou, dit autrement, que le problème a une solution unique. b) tracé à la règle et au compas. Si on choisit un dessin à l'échelle $a=4$, on trouve une longueur $AM_0 = BM_0 \approx 17,6$ cm c) Réponse via Pithagore.