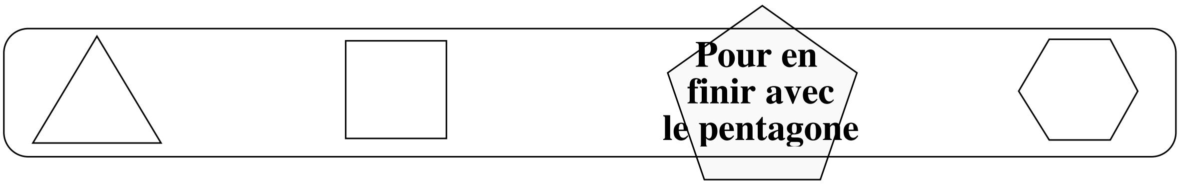
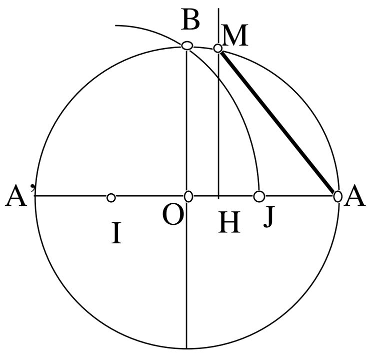
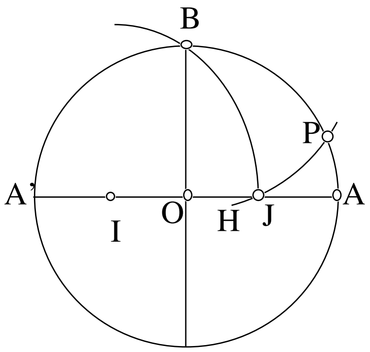


A. LE PENTAGONE REGULIER



Première construction :

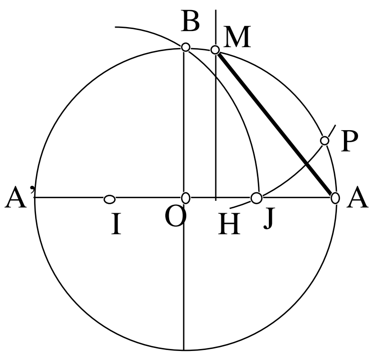
I milieu de OA'
L'arc de centre I passant par B rencontre OA en J.
La médiatrice de OJ rencontre le cercle en M.
AM est le côté du pentagone

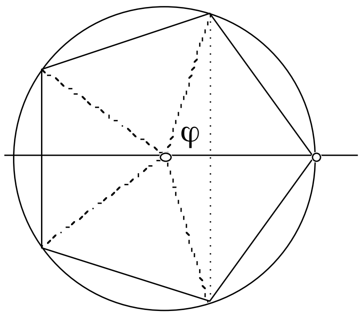


Deuxième construction :

I milieu de OA'.
L'arc de centre I passant par B rencontre OA en J.
L'arc de centre B passant par J rencontre le cercle en P.
BP est le côté du pentagone.

PREUVE :



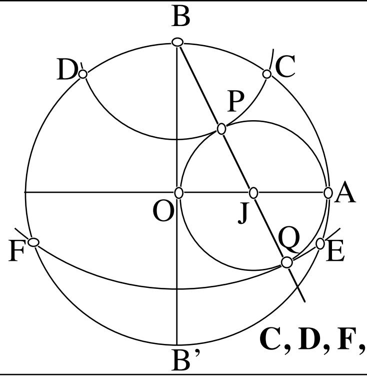


La démonstration repose sur le calcul de l'angle AOM. On suppose le cercle de rayon 1.
OI = 1/2 ; D'après Th. Pythagore : IB = $\sqrt{5}$ / 2 = IJ. Donc OJ / 2 = **OH = [$\sqrt{5}$ – 1] /4.**
C'est le cosinus de l'angle AOM.
Soit $\varphi = 2\pi/5$. En projetant sur A'A les sommets du pentagone, on trouve :
$1 + 2\cos\varphi + 2\cos 2\varphi = 0$. Or $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$. Donc $4\cos^2\varphi + 2\cos\varphi - 1 = 0$
La seule solution acceptable de cette équation est bien [$\sqrt{5}$ – 1] /4.
Il reste à calculer le côté AM du pentagone régulier ; on résout le triangle rectangle AHM.

On trouve $AM^2 = (5 - \sqrt{5})/2$.

Par ailleurs, en résolvant le triangle rectangle BOJ, on trouve également $BJ^2 = (5 - \sqrt{5}) /2$.

$$AM = BP = \text{côté du pentagone} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}} \cong 1,17557\ldots$$

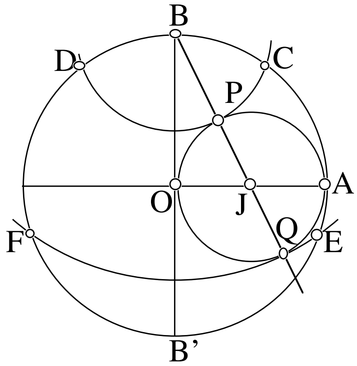


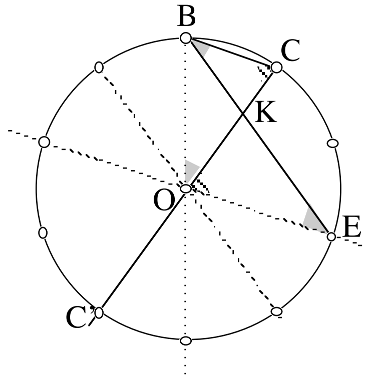
Troisième construction :

On trace le cercle de diamètre OA (centre J)
BJ rencontre ce cercle en P et Q.
Les arcs de centre B, passant par P et Q
rencontre le cercle respectivement en C, D, E, F

C, D, F, B', E sont les sommets du pentagone régulier.

PREUVE : Cette construction est en rapport les décagones réguliers convexes et étoilés.





On déduit de la première figure les relations : BQ – BP = 1 et $BQ.BP = BO^2 = 1$. Les longueurs BQ et –BP sont donc solutions de l'équation $X^2 - X - 1 = 0$.

Ces solutions sont : $(1 \pm \sqrt{5}) /2$, donc $BQ = (1 + \sqrt{5}) /2$ et $BP = (\sqrt{5} - 1) /2$.

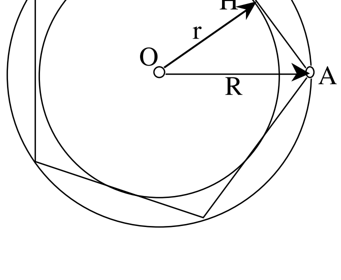
On déduit de la seconde figure que les triangles BOE, BKO, CBK et KEO sont isocèles (comparaisons angulaires). Puisque BK = BC et EK = EO, on a BK – BC = EO = 1.

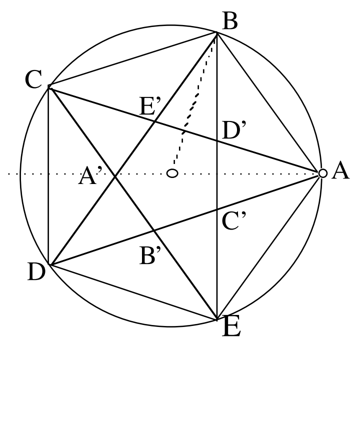
Par ailleurs, on déduit de la similitude de BOE et BKO: $BO^2 = BK.BE$, c'est à dire BE.BC = 1.

BC est le côté du décagone convexe et BE le côté du décagone étoilé. BE et –BC sont solution de la même équation que BQ et –BP dans la première figure.

Donc BQ et BP sont les côtés des décagones convexes et étoilés.

Par conséquent CD est le côté du pentagone convexe ; E étant le 3° sommet du décagone à partir de B, E et F sont les autres sommets du pentagone.





OA = 1. L'angle AOH = $\pi/5$. De $\cos 2\pi/5 = (\sqrt{5} - 1)/4$, on tire $\cos \pi/5 = (\sqrt{5} + 1)/4$.
C'est la moitié du Nombre d'Or (qui est solution de $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$).
On passe donc du cercle circonscrit au cercle inscrit par réduction de rapport $\varphi / 2$.

Pentagone convexe. Il a pour côté $d_5 = BA = 2 \sin \pi/5 = [(5 - \sqrt{5}) /2]^{1/2}$
Pentagone étoilé. Il a pour côté $d'_5 = BE = 2 \sin 2\pi/5 = [(5 + \sqrt{5}) /2]^{1/2}$
Le rapport de ces côtés est $d'_5 / d_5 = [(5+\sqrt{5})/(5-\sqrt{5})]^{1/2} = (1+\sqrt{5}) /2 = \varphi$.
Ce n'est pas tout : le pentagone étoilé détermine un plus petit pentagone convexe, de côté δ_5. BAC' étant isocèle, on a $\delta_5 + h = d_5$ et $\delta_5 + 2h = d'_5$. Par conséquent $d_5 / \delta_5 = \varphi^2$.

Résumé :

$$d_5 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \qquad d'_5 = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$$

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\varphi}{2} \qquad \frac{r}{R} = \frac{\varphi}{2} \qquad \frac{d'_5}{d_5} = \varphi \qquad \frac{d_5}{\delta_5} = \varphi^2$$

UN PLIAGE PENTAGONAL

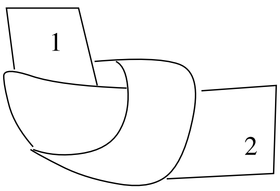


fig.1

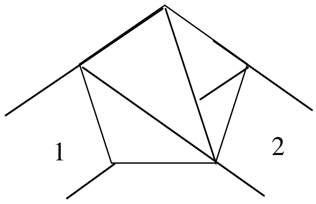


fig.2

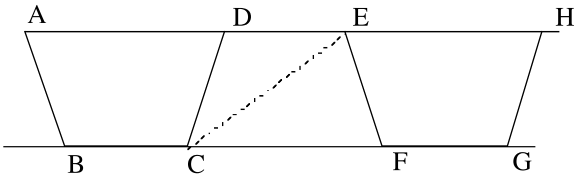
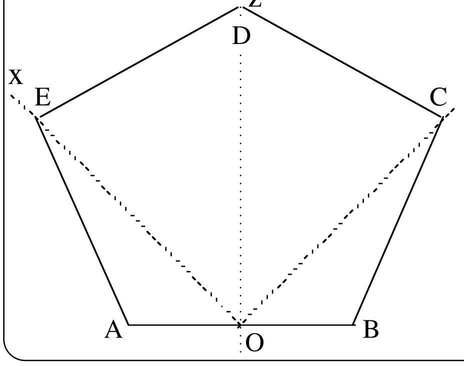


fig.3

On utilise une bande de papier rectangulaire et on lui fait subir un nœud, que l'on aplatit en veillant à ce que les sommets deviennent bien pointus (fig.2). Le pliage réalisé fait apparaître un pentagone régulier.

PREUVE
La bande dépliée fait apparaître une suite de trapèzes isocèles, qui ont de plus par construction, les propriétés suivantes : par pliage, la grande base EH vient sur la diagonale CE, donc CE = EH = CF.
Le pliage suivant porte un côté oblique sur une petite base, donc CD = DE = EF.
Les triangles CDE et ECF sont isocèles.
Egalités d'angles : DCE = DEC = ECF ; EFC = 2 ECF = CEF. Donc 5 ECF = π. Il en résulte bien que DEF = $3\pi/5$

B. Un pentagone presque régulier



Du milieu O de [AB], on trace la perpendiculaire et les deux bissectrices.

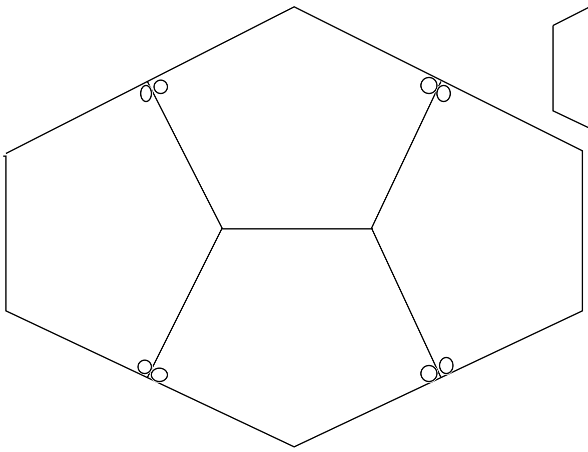
L'arc de centre A passant par B rencontre Ox en E.
La perpendiculaire en E à EA rencontre Oz en D. C est symétrique de E par rapport à Oz.

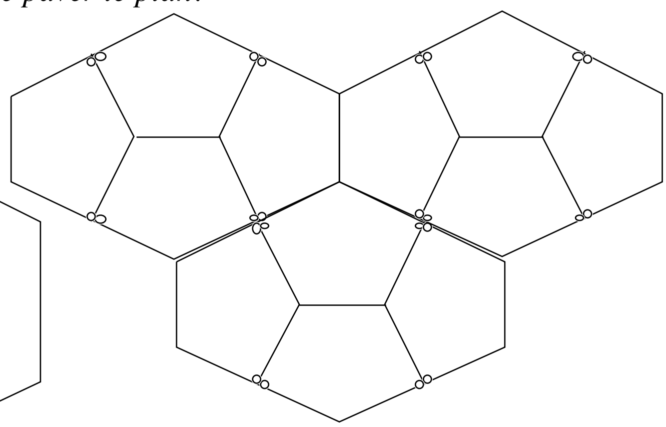
AB = BC = CD = DE = EA

PREUVE :
Le quadrilatère AODE comportant deux angles droits opposés est inscriptible. Donc les angles EAD et EOD sont égaux (à $\pi/4$). Il en résulte que le triangle rectangle AED est isocèle. Donc AE = ED.

MESURES : Soit AB = 1 ; AE = $\sqrt{2}$; En résolvant le triangle rectangle AOE : OE = $\sqrt{7} / 2$
Dans le triangle OAC : 1/ 2sinc C = OC / sin A = $\sqrt{2}$.
On en tire sin C = $1 / 2\sqrt{2}$ puis sin A = $(\sqrt{7} + 1) /4$, et enfin OC = $(\sqrt{7} + 1) / 2\sqrt{2}$
Les angles du pentagone en A et E valent approximativement 114,3° et 131,4°.

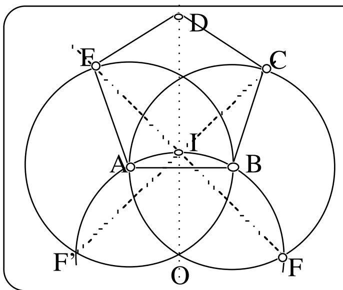
PAVAGE *: Ce pentagone a la propriété de paver le plan.*





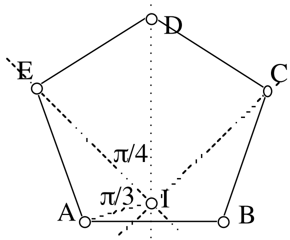
En effet la présence de deux angles droits opposés permet de constituer un hexagone (ayant 2 axes de symétrie) avec quatre pièces.

C. Le pentagone presque régulier d'A. Dürer.



La construction est fondée sur trois cercles tels que le centre de chacun est situé sur les deux autres.

Soient A et B deux centres de cercles, F l'un des points d'intersection avec le troisième, et I le milieu du petit arc AB. (FI) rencontre le cercle (A) en E.
L'arc de centre E passant par A rencontre (OF) en D.
C est le symétrique de E par rapport à (OD).



FBAF' est un trapèze composé de 3 triangles équilatéraux.
Donc FOF' sont alignés et FIF' = $\pi/2$. Donc EID = $\pi/4$.
De plus AIF = $2\pi/3$, donc AIE = $\pi/3$.

La résolution du triangle AIB donne :
AI = $\sqrt{2} / (\sqrt{3}+1)$ puisque AIB = $5\pi/12$

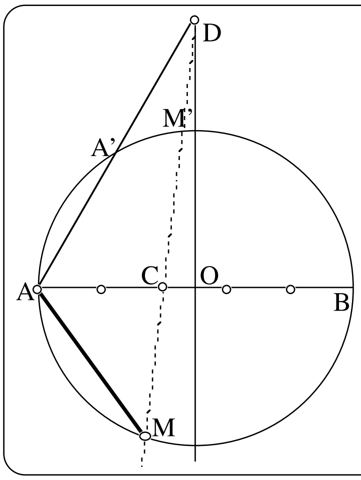
La résolution du triangle AIE (deux côtés et un angle connus) donne :

$$\sin E = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)}, \text{ et } \cos E = \frac{\sqrt{5+4\sqrt{3}}}{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)} \Rightarrow E \cong 26°,63\ldots$$

Soit d = EDI. Dans le quadrilatère AEDH (H = projeté de I sur [AB]),
l'angle A vaut $2\pi - \pi/2 - 3\pi/4 - E$, soit **A ≈ 108°,37**

Il reste à résoudre le triangle EID. On trouve sin d = EI / $\sqrt{2}$ et EI dans le triangle précédent. En prenant encore EA pour unité, EI ≈ 1,1527…
Il vient d ≈ 54°,595, soit **D ≈ 109°19** et **E ≈ 107°**.
On voit que l'on obtient des angles proches à environ 1% de ceux du pentagone régulier.

D. Encore une construction approchée du pentagone.



C'est ici un cas particulier d'une construction approchée classique du polygone régulier à n côtés.

D est tel que ABD est équilatéral.
On divise [AB] en n parties égales (ici : 5). Soit C le deuxième point de cette division.
La droite DC rencontre le cercle en M.

AM est le côté approché du polygone régulier à n côtés.

On se propose d'examiner la qualité de l'approximation. La résolution du triangle DAC permet de calculer l'angle DAC :

$$\sin DAC = \sqrt{\frac{3}{n^2 - 2n + 4}}\ , \ \cos DAC = \frac{n - 1}{\sqrt{n^2 - 2n + 4}}$$

Les triangles DAM et DM'A' sont semblables. On appelle t = tan (AOM/2), on obtient :

$$t = \tan \frac{AOM}{2} = \frac{4 - n + \sqrt{n^2 + 16n - 32}}{2\sqrt{3}\ (n-2)}$$

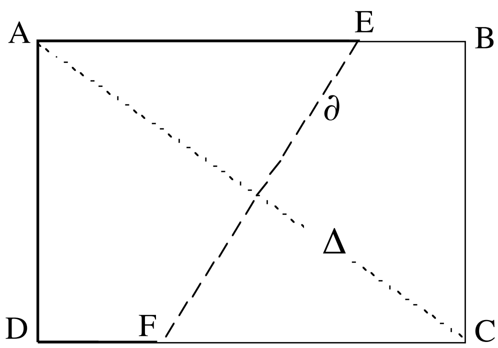
Cette formule permet d'évaluer l'approximation :

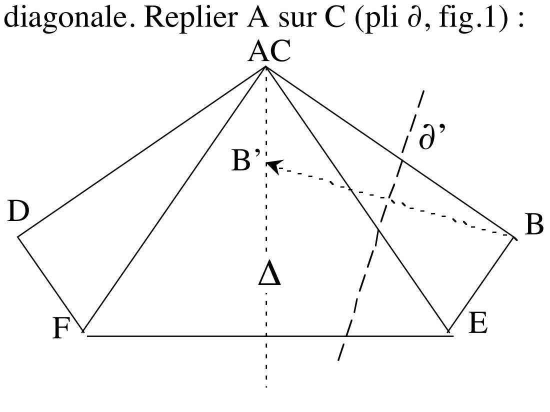
- La construction est **exacte** pour n = 4 et n = 6.
- Pour n = 5, l'angle au centre obtenu est 71°,95345, soit *une erreur de –0,065%*
- Pour n = 7, l'angle au centre obtenu est 51°,5182, soit une erreur de +0,17%
- Pour n = 9, l'angle au centre obtenu est 40°,27781, soit une erreur de +0,69%

On voit que cette construction simple est très acceptable tant que n n'excède pas la douzaine.

E. Encore un pliage pour Construire un pentagone

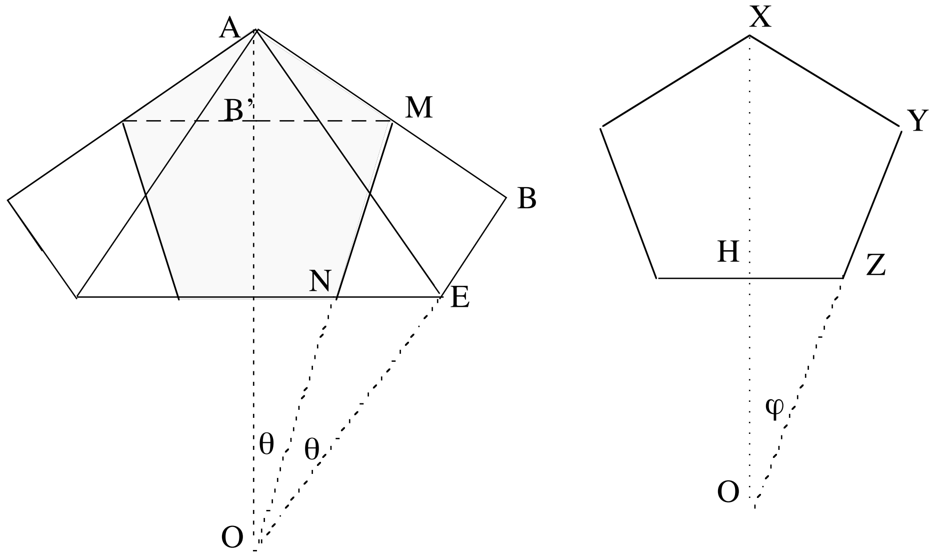
On utilise une feuille de format A4. Soit AC une diagonale. Replier A sur C (pli ∂, fig.1) :





Le pli est [EF]. Plier ensuite [BE] sur la diagonale Δ; le pli ∂' est indiqué en traits interrompus. Replier de même [DF] sur la même diagonale. On obtient un pentagone qui est *presque* régulier.

C'est ce qu'il s'agit d'établir.



Soit a la longueur de la feuille, et b la largeur. Montrer que tan 2θ = b /a

Sachant que $\tan 2\,\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$, montrer que $\tan\theta = t = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{b}$

Dans un pentagone régulier, les angles X, Y, Z mesurent 108° (c'est à dire 3π/5). Par conséquent φ = 18° (c'est à dire π/10)

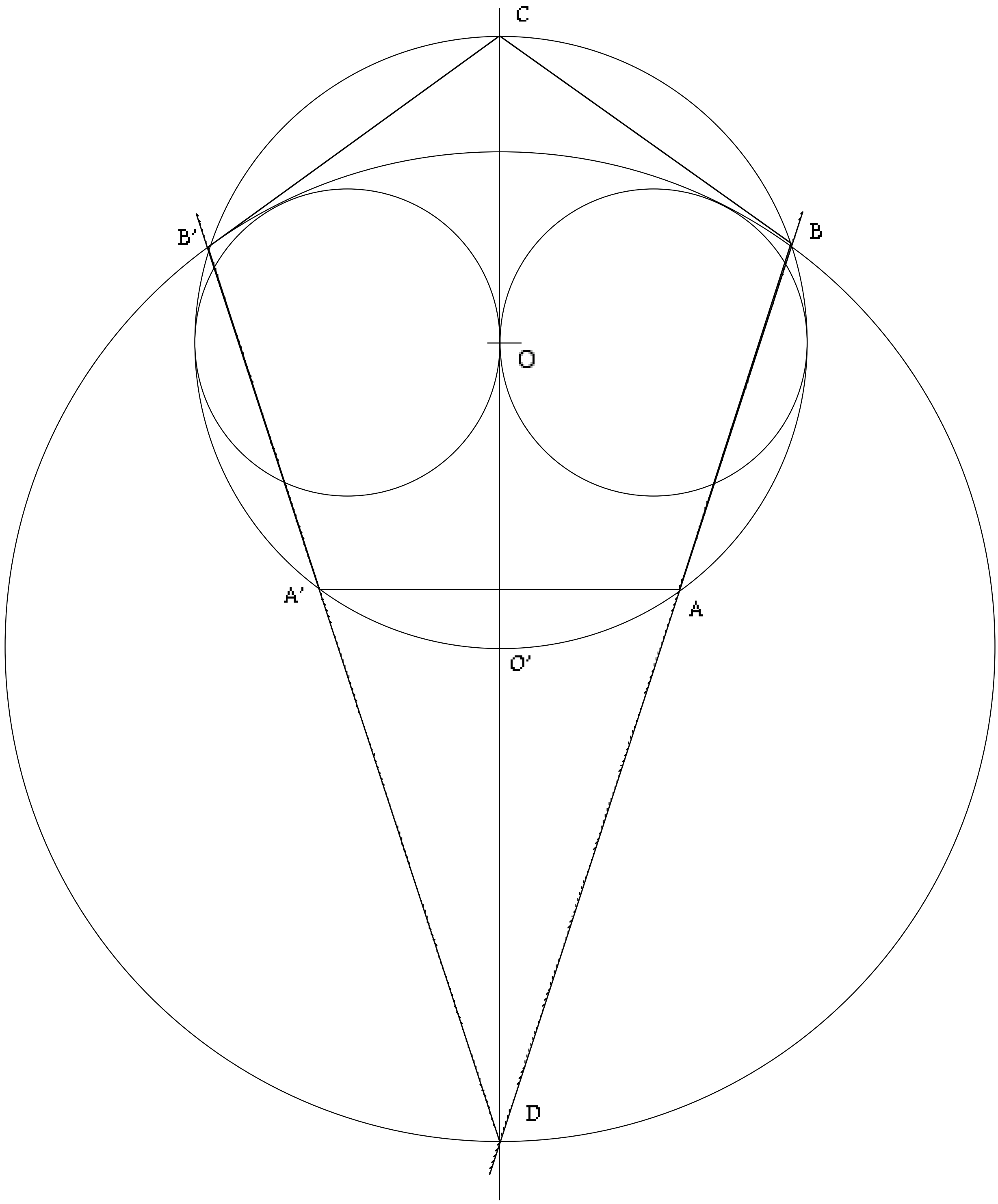
Sachant que $\cos 72° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, montrer que $\tan\varphi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{1-\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

0,,

Montrer que dans le pentagone construit, les angles N et M mesurent 90°+ θ, c'est à dire environ 107,63 degrés. Conclure que pour obtenir un pentagone régulier, il faudrait un rapport a/b ≈ 1,3764 (et non √2 comme pour le format A4), ou encore une longueur de 28,9 cm pour une largeur de 21cm.

F. Et pour finir une construction exotique

Extrait de René Dumont : *Angkor Vat par la règle et le compas*, Etudes orientales, Ed. Peninsule, Metz, 1996

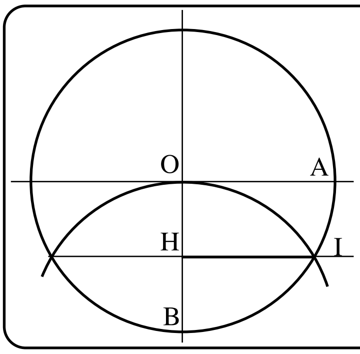


Cercles de rayons R tangents en O, et cercle de rayon 2R de centre O.
De O′ comme centre, le cercle tangent intérieurement aux petits cercles ; il rencontre le cercle (O) en B.
Joindre BD. AB et AA′ sont deux côtés du pentagone inscrit dans le cercle (O).

Mais est-ce bien vrai ?

✧✧✧✧

Etude de quelques constructions géométriques approchées



Heptagone :

L'arc de centre B passant par O rencontre le cercle en I
La perpendiculaire HI est une longueur proche du côté de l'heptagone inscrit (sept côtés)

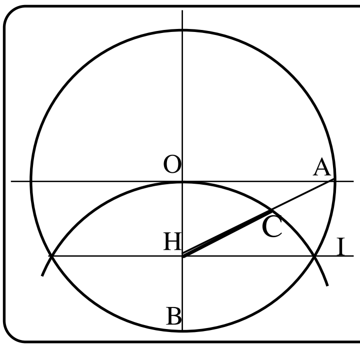
Le triangle OIB étant équilatéral, HI est bien sûr égal à **$\sqrt{3}$ / 2** (en choisissant OA pour unité).
θ étant l'angle au centre interceptant cette corde, on trouve $\theta = 25°, 6589\ldots$ c'est à dire :

$7\theta = 179°, 61234.$ L'erreur angulaire est donc d'environ 0,2%.

En développant $(\cos\theta + i \sin\theta)^7$, on obtient

$$\sin 7\theta = 7.\cos^6\theta.\sin\theta + 35 \cos^5\theta.\sin^2\theta + 21 \cos^3\theta.\sin^5\theta + \sin^7\theta$$

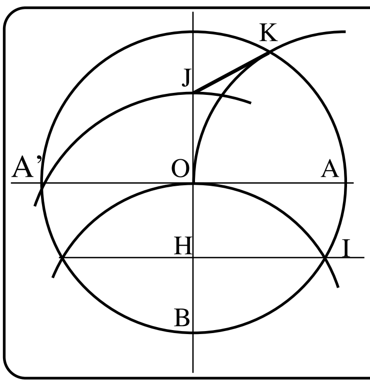
La substitution de $\sqrt{3}$ / 2 à $\sin\theta$ donne $\sin 7\theta = 0{,}0347$, qui est en effet proche de $\sin \pi = 0$



Enneagone :

L'arc de centre B passant par O rencontre le cercle en I.
Soit H le projeté de I sur (OB).
HA rencontre l'arc centré en B passant par O en C.
La longueur HC est proche du côté de l'énnéagone inscrit (neuf côtés).

La longueur de HA est **$\sqrt{5}$ /2** (résolution du triangle OAH par théorème de Pythagore).
Dans un repère d'origine B, d'axes parallèles à (OA) et (OB), le cercle (B; BO) a pour équation $x^2 + y^2 = 1$, et la droite HA : $y = 1 - 2x$. On en tire les coordonnées de C et les composantes du vecteur HC : (3/10 ; –3/5). Donc HI = $3 / 2\sqrt{5} \approx 0{,}67082\ldots$
Ceci donne pour θ (angle au centre interceptant cette corde) : $\theta \approx 19°, 59748$,
soit pour 9θ : 176° , 377… L'erreur est d'environ 2%.



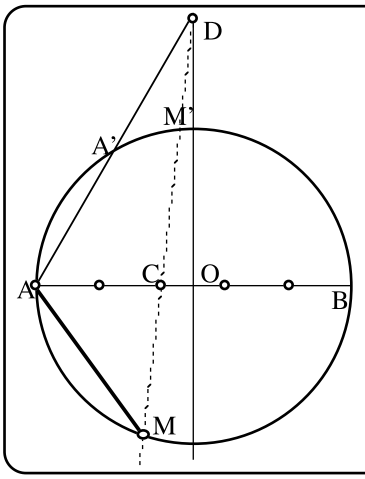
Hendécagone :

Les arcs de centre B et A passant par O rencontrent le cercle en I et K. Soit H le projeté de I sur (OB).
L'arc de centre H passant par A' rencontre (OB) en J.

JK est une longueur proche du côté de l'Hendécagone inscrit (onze côtés).

Soit K' le projeté de K sur (OA) et J' le projeté de J sur (KK').
OJ = $(\sqrt{5} - 1)/2$ et KK' = $\sqrt{3}$ / 2. On en tire KJ' = $(\sqrt{3} - \sqrt{5} + 1)/2$. La résolution du triangle rectangle

KJJ' fournit $BJ^2 = (5 + \sqrt{3} - \sqrt{5} - \sqrt{15})/2$. Soit $BJ \approx 0,55812$
L'angle au centre θ interceptant cette corde vaut $\approx 16°, 204\ldots$ Ce qui donne $11\theta \approx 178°, 245$
L'erreur est de l'ordre de 1%.



Construction approchée du polygone régulier inscrit à n côtés :

D est tel que ABD est équilatéral.
On divise [AB] en n parties égales (ici : 5). Soit C le **deuxième** point de cette division.
La droite DC rencontre le cercle en M.

AM est le côté approché du polygone régulier à n côtés.

On se propose d'examiner la qualité de l'approximation. La résolution du triangle DAC permet de calculer l'angle DAC :

$$\sin DAC = \sqrt{\frac{3}{n^2 - 2n + 4}}, \quad \cos DAC = \frac{n - 1}{\sqrt{n^2 - 2n + 4}}$$

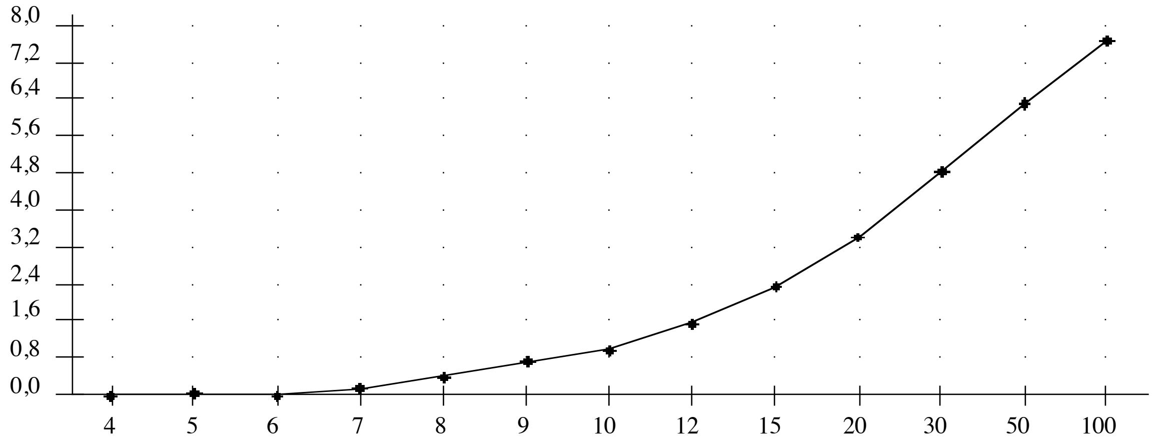
Les triangles DAM et DM'A' sont semblables. On appelle $t = \tan(AOM/2)$, on obtient :

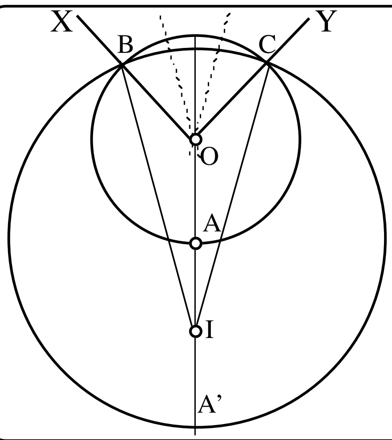
$$t = \tan\frac{AOM}{2} = \frac{4 - n + \sqrt{n^2 + 16n - 32}}{2\sqrt{3}\,(n-2)}$$

Cette formule permet d'évaluer l'approximation :

- La construction est **exacte** pour n = 4 et n = 6.
- Le graphique ci-dessous porte en abscisse les valeurs de n, et en ordonnée le pourcentage d'erreur commise sur l'angle au centre interceptant le côté du polygone construit.

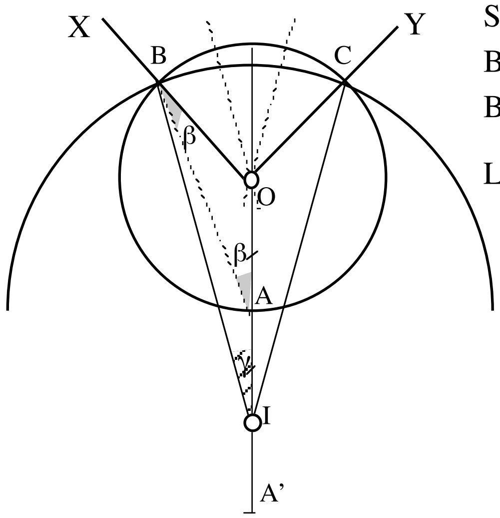
On voit que pour n < 10 l'erreur commise est inférieure à 1%.





Trisection (approchée) d'un angle :

Soit XOY l'angle à partager. On trace la bissectrice, et un cercle quelconque de centre O, qui rencontre OX, OY et la bissectrice en B, C et A.
On trace le cercle de centre A passant par B et C.
Il rencontre la bissectrice en A’. Soit I le milieu de [AA’].
Les parallèles par O à IB et IC sont les trisectrices cherchées.



Soit XOY = α. On pose AA’ = AB = 2

BOA est isocèle, donc $\beta = \alpha/4$

BO = OA = $1/\cos\beta = 1/\cos(\alpha/4)$

La résolution du triangle BOI donne :

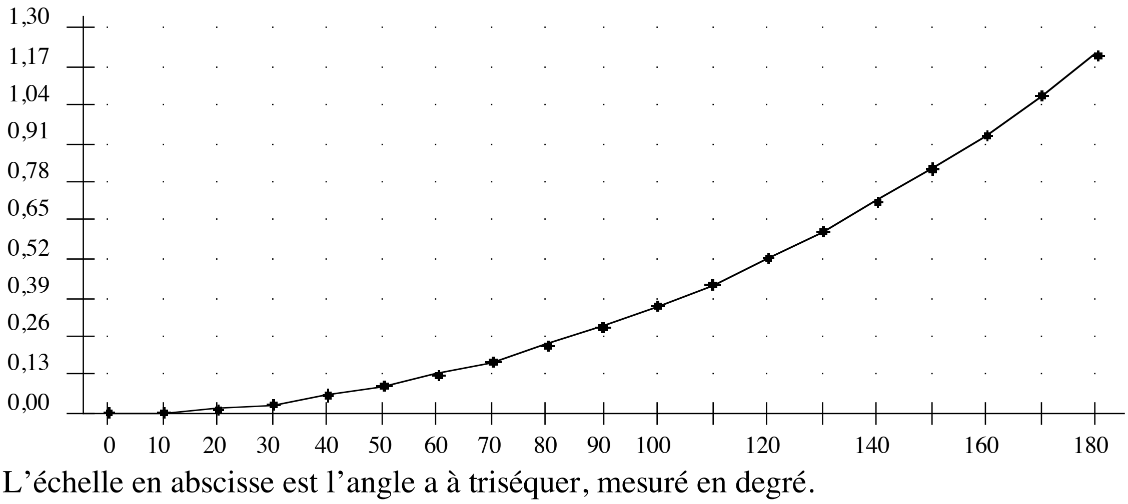
$$\frac{1+\dfrac{1}{\cos\beta}}{\sin(2\beta-\gamma)} = \frac{\dfrac{1}{\cos\beta}}{\sin\gamma}$$

D'où : $(1+\cos\beta).\sin\gamma = \sin(2\beta-\gamma)$

En développant, on trouve :

$$\boxed{\tan\gamma = \frac{\sin\alpha/2}{1+\cos\alpha/2+\cos\alpha/4}}$$

Evaluation du résultat :



L’échelle en abscisse est l’angle a à triséquer, mesuré en degré.
En ordonnée est indiquée le **pourcentage** d’erreur relative. On voit que l’erreur demeure inférieure à 1% jusqu’à 160°.

F.Boule, Dijon, 1997