Géométrie plane sans instrument

La géométrie plane à l'école a pour point de départ la manipulation d'objets concrets. A partir de là, il s'agit d'observer, de construire, de représenter. Cet ensemble d'expériences conduit à découvrir des objets géométriques nouveaux, à les mettre en relation les uns avec les autres.
L'observation et la manipulation sont *des points de départ*, mais ne sont pas le tout de la géométrie. Les définitions de notions ou l'énoncé de propriétés géométriques non plus.
L'enfant élabore des représentations à partir de son expérience, et construit ainsi un savoir nouveau, qui est une «géométrie concrète». Après quoi, au collège, ces notions trouveront un cadre plus général et conduiront à l'établissement déductif de résultats géométriques. Mais ceux-ci n'auront de sens que pour autant qu'ils renverront à une expérience sensible antérieure.

Quatre conséquences résultent de ce principe :

• Les objets *nouveaux* sont définis à partir d'objets déjà connus sinon dans leur définition abstraite, du moins par leur familiarité.
• La **pluralité** des approches est importante : un objet géométrique n'a pas une définition unique; il résulte de la synthèse de plusieurs approches possibles.
• La connaissance d'un objet géométrique n'est pas seulement *déclarative* : elle intègre également ce que l'on *sait faire* avec cet objet, ou bien ce qu'il *permet de faire*.
• L'usage des instruments (ou la construction des instruments) fait partie de la géométrie : un instrument condense du savoir. Le choix pertinent d'un instrument, le soin dans son usage sont des compétences importantes.

Le choix qui est fait dans les pages qui suivent est celui d'utiliser le minimum d'instrument nouveau, et de partir des figures les plus répandues dans l'environnement quotidien : le **rectangle** (*feuille de papier*, dalle, vitre, porte, mur…) et le **disque** (trace d'un verre ou d'une assiette). La seule opération utilisée pour l'instant est le **pliage**, ou la **superposition**.

RECTANGLE

Une feuille de papier donne l'image d'un rectangle (fig.1.a)

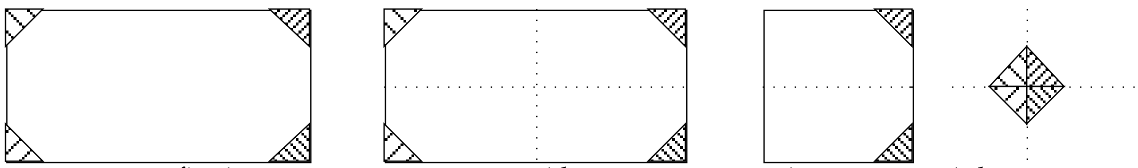
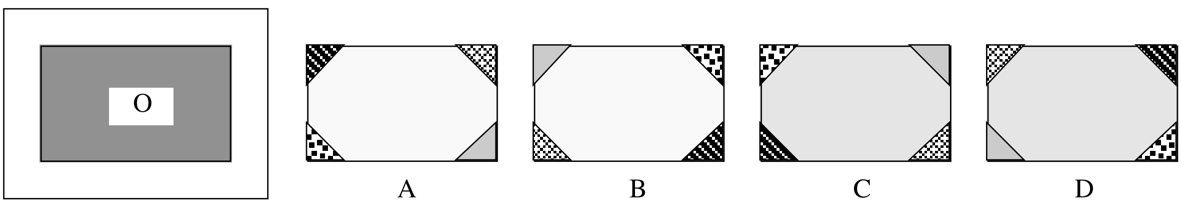


fig. 1.a 1.b 1. c 1.d

Par pliages bord sur bord (fig. 1.b), on fait apparaître deux axes de symétrie (médianes du rectangle). Ces pliages permettent de superposer deux à deux les coins du rectangle (fig.1.c). Ces angles sont donc tous égaux. La rencontre des axes de symétrie est le CENTRE du rectangle.
Il est possible d'amener par pliages les quatre coins au centre du rectangle (fig. 1.d) : les quatre coins réalisent un tour complet. Chaque angle du rectangle est donc égal à un quart de tour, c'est-à-dire un ANGLE DROIT.



A B C D

fig. 2

Supposons découpé un rectangle (O) dans une feuille. De combien de façon peut-on replacer le rectangle découpé dans le trou ? Il y a quatre solutions : tel qu'il a été découpé (A), ou bien en lui faisant subir un demi-tour (B), ou encore en retournant autour de la plus longue médiane (C), ou encore autour de la plus petite (D).

Il est possible de faire apparaître les diagonales par pliage.

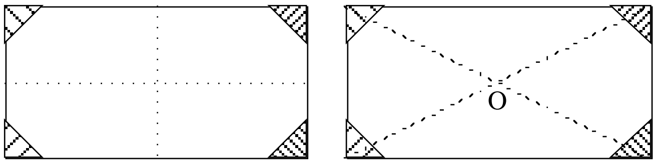


fig. 3

Mais ces diagonales ne sont *en général* pas des axes de symétrie. Si elles le sont, la longueur et la largeur du rectangle sont superposables : il s'agit d'un CARRE.
Ces diagonales se rencontrent au centre du rectangle. Chacune découpe le rectangle en deux TRIANGLES RECTANGLES. Les quatre triangles rectangles que l'on peut ainsi obtenir sont superposables par décalque, ou par rotation.

CARRE

Cette observation fournit le moyen d'obtenir un carré à partir d'une feuille rectangulaire.

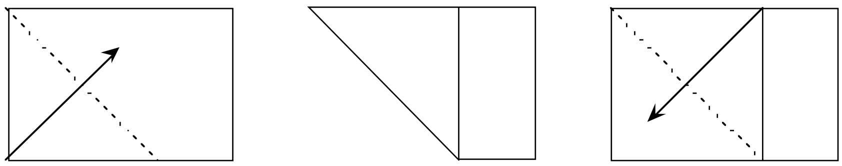


fig. 4.a fig. 4.b fig. 4.c

On plie largeur sur longueur (fig.4.a). Puis on plie selon le bord obtenu (fig. 4.b). enfin , on déplie (fig. 4.c). La surface obtenue possède quatre axes de symétrie (les médianes et les diagonales) qui se rencontrent tous au centre du carré. Découpée dans une feuille, elle peut occuper le trou ainsi obtenu de 8 façon possibles.

ANGLE DROIT. EQUERRE

Les coins du rectangle donnent une bonne image de l'angle droit. En voici une autre, obtenue par double pliage :

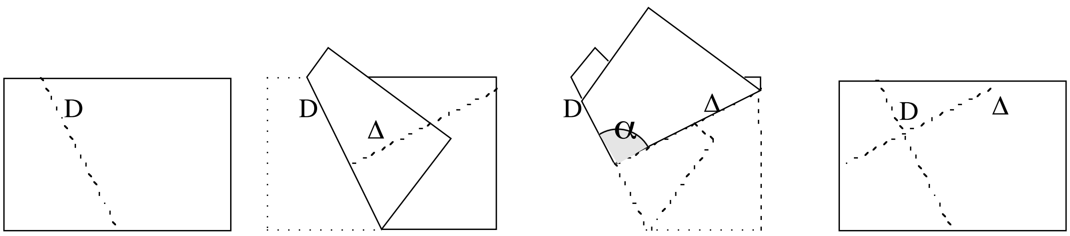


fig. 5.a fig.5.b fig. 5.c fig. 5.d

On plie une feuille (fig.5.a) selon un premier pli (D), puis on replie ce pli bord sur bord (fig.5.b). On détermine ainsi un second pli (Δ), qui est *par définition* **perpendiculaire** au premier. Le coin (a) ainsi obtenu est un **angle droit**. C'est un moyen simple de construire une **équerre**.

PARALLELISME

En opérant une nouvelle fois le second pliage précédent, on obtient un pli (Δ') lui aussi perpendiculaire à (D), fig 6.a. *Par définition*, les plis (Δ) et (Δ') sont **parallèles** (deux plis perpendiculaires à un troisième).
Cette construction en justifie une autre, obtenue en faisant glisser une équerre le long d'une règle (fig. 6.b), ou plus généralement celle qui consiste à faire glisser un gabarit le long d'une règle (fig. 6.c).

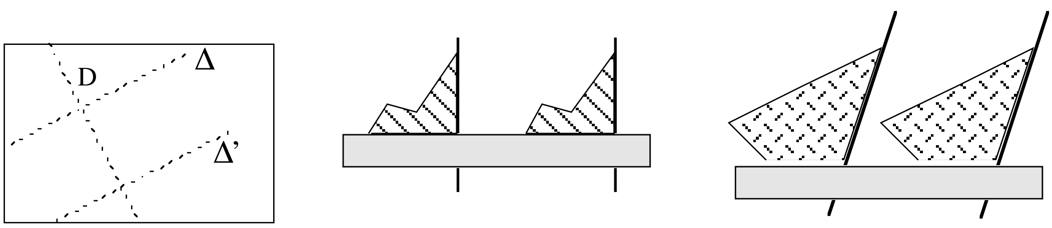


fig. 6.a fig. 6.b fig. 6.c

Cette définition justifie naturellement que les côtés opposés d'un rectangle (ou d'un carré) sont parallèles.

PARALLELOGRAMME

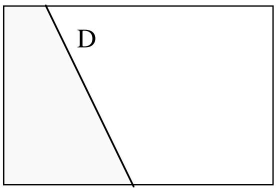


fig. 7.a

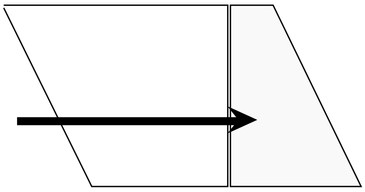


fig. 7.b

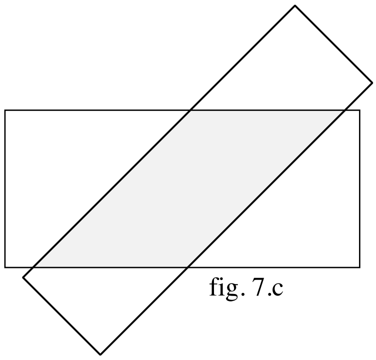


fig. 7.c

Deux constructions possibles : à partir d'un rectangle, découper selon un pli quelconque et recoller largeur sur largeur (fig. 7.a & b), ou bien partie commune à deux rectangles (pourvu que ces bandes soient assez longues pour que cette partie commune ait quatre côtés).
De la seconde construction découle la définition : quadrilatère à côtés opposés parallèles.
De la première aussi, mais de façon moins immédiate. Par contre l'équivalence des aires du parallélogramme et du rectangle est immédiate, et donc un moyen de calculer l'aire du parallélogramme.
De la manipulation du parallélogramme ainsi obtenu, on tire les propriétés suivantes :

• Le rectangle est un cas particulier de parallélogramme.
• Le parallélogramme *en général* n'a pas d'axe de symétrie (à moins que les quatre côtés ne soient superposables [losange]), mais il y a un centre, qui est l'intersection des diagonales.
• Il n'y a *en général* que deux façons de remplir un trou en forme de parallélogramme par l'objet extrait (à moins qu'il ne s'agisse d'un rectangle ou d'un losange).
• Les angles opposés sont superposables.
• Les côtés opposés ont la même longueur.

TRIANGLE EQUILATERAL.

Construction à partir d'un rectangle.
Analyse de la figure :

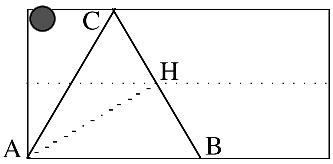


fig. 8.a

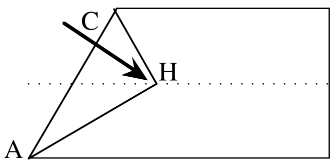


fig.8.b

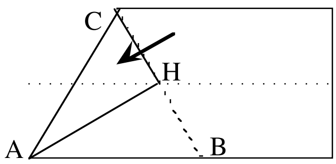


fig. 8.c

On cherche à obtenir le triangle ABC (fig. 8.a). Le pli médian va rencontrer le côté BC en son milieu. AH sera médiane, donc aussi hauteur : l'angle en H est droit. Pour l'obtenir, il suffit de plier le coin marqué d'un point sur le pli médian (pli passant par A, fig. 8.b). Un second pliage autour de CH fait apparaître le côté BC. On s'aperçoit également que la longueur du rectangle va coïncider avec le côté AC. On a ainsi partagé l'angle plat en trois angles superposables : leur mesure est donc de 60°.

Construction à partir d'un disque
Analyse de la figure.

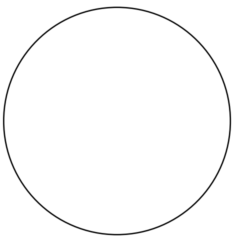


fig. 9.a

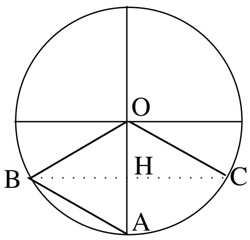


fig. 9.b

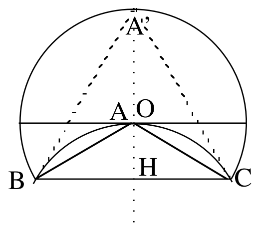


fig. 9.c

On obtient un cercle en prenant la trace d'un objet rond, puis on découpe le disque (fig. 9.a).
On fait apparaître un diamètre par un premier pliage, puis le centre O du disque par un second pliage autour d'un diamètre perpendiculaire au premier (fig. 9.b).

REMARQUE : le disque possède une *infinité* d'axes de symétrie qui se rencontrent tous au centre, ce sont les diamètres.

Soit H le milieu de [OA] et BC la perpendiculaire en H ; c'est la médiatrice de [OH]. Donc OA = OB = BA. Le triangle OBA est équilatéral; donc l'angle BOA mesure 60°. Par conséquent BOC mesure 120°.
Construction : en pliant A sur O (fig. 9.c), on fait apparaître le pli (BC). Il reste à plier autour de BA', puis de CA' pour obtenir le triangle équilatéral BCA'. On constate que les trois arcs de cercle passent tous par le centre O.

PENTAGONE REGULIER

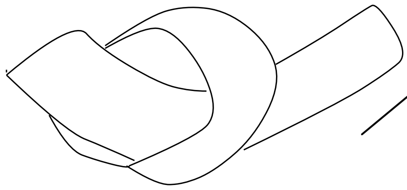


fig.10.a

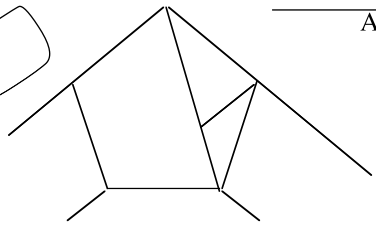


fig. 10.b

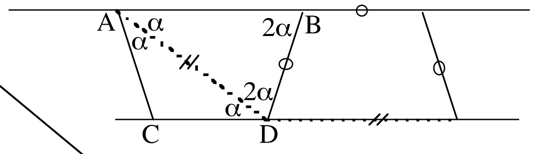


fig. 10.c

Construction : on utilise une bande rectangulaire assez longue, à laquelle on fait subir un nœud (fig.10.a). Serrer ce nœud et l'aplatir de telle façon que les sommets soient bien marqués. On obtient un pentagone régulier (fig. 10.b). Cette construction est exacte.

Justification : déplier la bande. La trace des plis (fig. 10.c) déterminent une suite de trapèzes (fig.10.c). En remarquant les parties qui viennent d'être superposées, on constate que :

- Les diagonales sont égales à la grande base (donc BAD est isocèle)
- Les côtés obliques sont égaux à la petite base (donc ACD est isocèle).

Soit a l'angle CAD. Il en résulte que CDA = a. Mais comme les bases sont parallèles, DAB = a.
Mais ABD = BAC = 2 a. Comme BAD est isocèle : ADB = 2 a. Par suite l'angle plat = 5 a.
Donc a = 36° et ACD = CDB qui sont les angles du pentagones mesurent 108°. Le pentagone est bien régulier.

HEXAGONE REGULIER

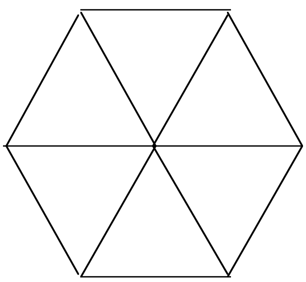


fig. 11.a

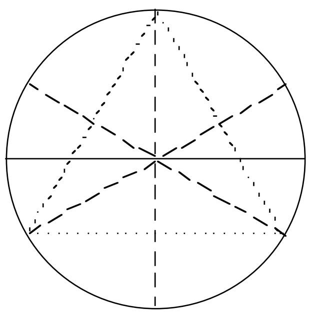


fig. 11.b

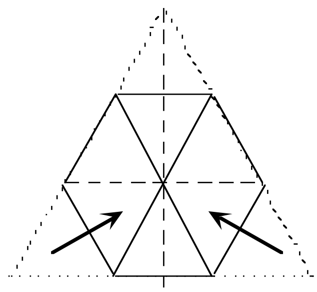


fig. 11.c

On peut l'obtenir de plusieurs façons :

- soit à l'aide de six triangles équilatéraux (fig. 11.a)
- soit à partir du disque utilisé fig. 9.c : une fois réalisé le triangle équilatéral, on plie selon les trois diamètres axes de symétrie (fig. 11.b) : on obtient les sommets de l'hexagone régulier inscrit dans le cercle.
- soit enfin en pliant tous les sommets du triangle équilatéral sur le centre du triangle (fig. 11.c) : on obtient ainsi un hexagone régulier.

OCTOGONE REGULIER

- A partir d'un disque, il suffit de faire apparaître des diamètres perpendiculaires, puis les bissectrices de ces angles : on obtient les sommets de l'octogone régulier (fig. 12.a)
- A partir de deux carrés superposables (fig. 12.b) : marquer les diagonales de l'un et les médianes de l'autre. Puis les placer l'un sur l'autre, les médianes de l'un superposées aux diagonales de l'autre (fig. 12.c). Enfin découper tous les triangles qui dépassent. On obtient ainsi deux octogones réguliers superposés.

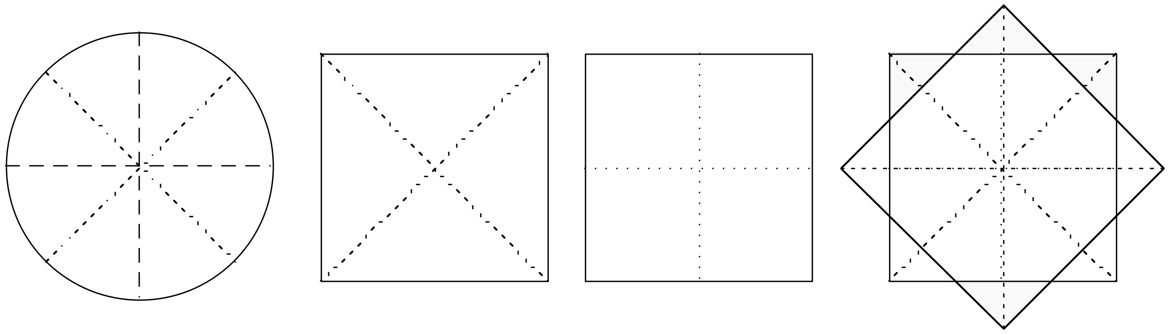


fig. 12.a fig. 12.b fig. 12.c

On peut très bien imaginer de poursuivre cette procédure; en décalant les deux polygones de 1/16° de tour, puis en découpant les triangles débordant, on obtient deux polygones réguliers de 16 côtés etc. On obtient ainsi une **approximation polygonale du cercle** inscrit dans les carrés initiaux. C'est une méthode (à vrai dire peu précise) pour obtenir une valeur approchée du nombre π (rapport de la circonférence au diamètre).

PARTAGE d'une FEUILLE ou d'un SEGMENT en 3, ou en 5 parties égales

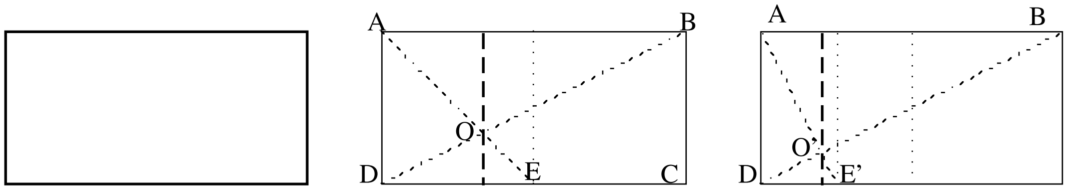


fig. 13.a fig. 13.b fig. 13.c

Il s'agit de partager un rectangle (fig. 13.a) en rectangles de même largeur et dont la longueur soit le tiers de la longueur initiale.
Construction : faire apparaître le pli médian passant par E, puis joindre AE et BD, qui se rencontrent en O. Le pli parallèle à la largeur passant par O divise la longueur au tiers.
De la même façon (fig.13.c), pour obtenir un partage au cinquième, plier la feuille en quatre selon la longueur, puis joindre AE' et BD. Le pli passant par le point de rencontre O' partage la longueur en son cinquième. C'est une application simple du théorème de Thalès.

FORMULES D'AIRES

La formule première concerne le RECTANGLE. On obtient l'aire du rectangle, une unité étant choisie, en faisant le produit de la longueur par la largeur.

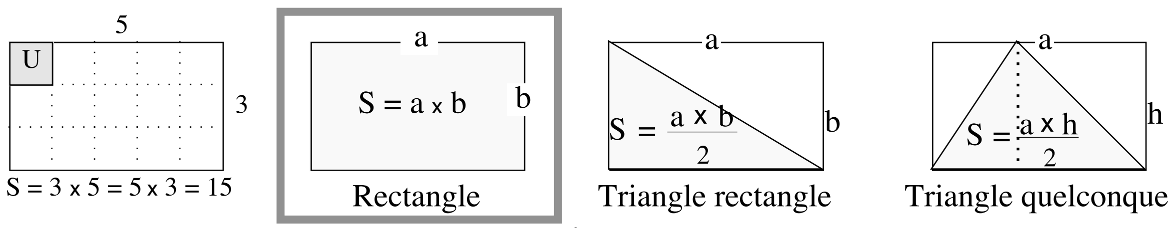


fig. 13

On admet cette formule même si les mesures de longueur et de largeur ne sont pas des nombres entiers.
On passe au triangle rectangle en découpant le rectangle selon une diagonale.
On passe à un triangle rectangle (inscrit dans un rectangle) en faisant apparaître l'une des hauteurs. On décompose ainsi le triangle en deux triangles rectangles dont les aires sont calculables. La réunion des deux aires justifie la formule classique.

PARALLELOGRAMME, TRAPEZE

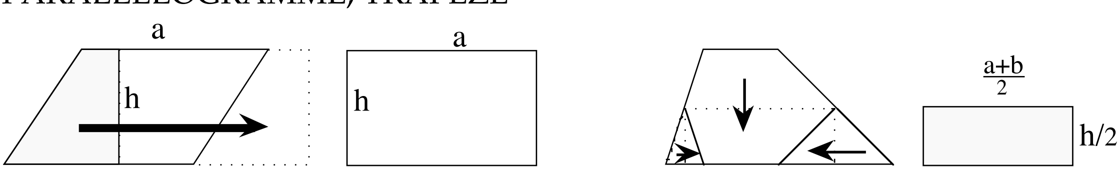


fig. 14.a fig.14.b

Le découpage du parallélogramme permet de se ramener à un rectangle (fig. 14.a). Ceci fait clairement apparaître que l'aire du parallélogramme dépend, non pas de la longueur des côtés, mais d'une longueur et d'une largeur de bande.
Pour le trapèze (fig. 14.b) : replier la petite base sur la grande; puis les extrémités de la grande base sur les extrémités de la petite ainsi pliée. On obtient un rectangle en double épaisseur, dont les dimensions sont la demi-somme des bases et la demi-hauteur. L'aire du trapèze est donc le produit de la demi-somme des bases par la hauteur.

DISQUE

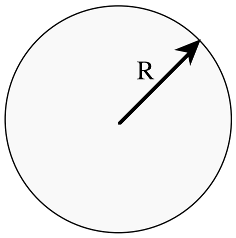


fig.15.a

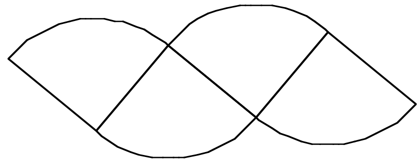


fig. 15.b

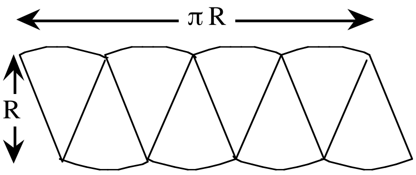


fig. 15.c

On découpe le disque en quatre quartiers que l'on assemble comme indiqué par la fig. 15.b.
Puis chacun de ces quartiers en deux (fig. 15.c) etc. Ce processus tend vers une limite : un rectangle qui aura pour largeur le rayon du disque et pour longueur la demi-circonférence πR (si l'on admet la formule donnant la longueur du cercle). Ceci ne justifie pas, mais fournit une intuition pour le calcul de l'aire du disque.

François Boule, Dijon, 1997