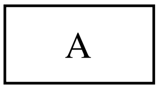
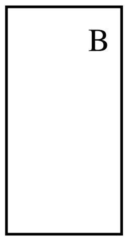
PROPORTIONNALITE

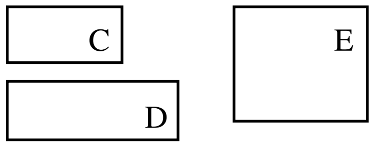
La proportionnalité est essentielle à la compréhension des relation entre grandeurs dans beaucoup de phénomènes physiques; sous l'aspect des pourcentages, elle joue un rôle social important; elle éclaire les relations entre multiplication et division dès le Cours Moyen.

Exemple :

Voici un rectangle

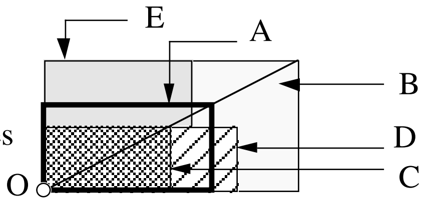






Peut-on dire de certains de ceux-ci qu'ils ont la même forme que A ?

Il n'est pas utile de mesurer pour s'en rendre compte.
Il suffit de disposer les rectangles ainsi (coin commun en O).



Deux rectangles ont l'une de leur diagonale confondue avec celle de A.
C'est à dire (Th. de Thalès) que leur **proportion** est la même (rapport Longueur/largeur). Il n'est pas nécessaire de connaître cette proportion, ni de mesurer les côtés pour comparer les rectangles.

Point de vue mathématique

Soient deux listes de nombres (qui peuvent mesurer deux grandeurs, chacune à l'aide d'une unité).

a	b	c	d	e	…
a'	b'	c'	d'	e'	…

On distingue nettement deux aspects :

– **aspect "fonctionnel"** : on peut déterminer un nombre réel k tel que a'=ka, b'=kb, c'=kc etc. Ce nombre représente graphiquement la "pente" de la droite qui supporte les points de coordonnées (a,a'), (b,b'), (c,c')…Mais il dépend des unités choisies, et n'a donc pas de signification physique.

– **aspect "relationnel"** : il peut exister entre les éléments de l'une des listes des relations du type : $a < b$ ou $c = a + b$ ou $d = ka + c$ etc . **Alors** ces mêmes relations existent entre éléments correspondants de la seconde liste : $a' < b'$, $c' = a' + b'$, $d' = ka' + b'$…On dit que la proportionnalité "conserve" ces relations. Ceci fonde la définition des applications linéaires.

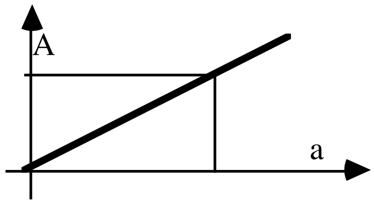
Conséquences

Certains termes de l'une ou l'autre liste étant inconnus

a	b	?	d	e	f
a'	b'	c'	d'	e'	?

On peut soit chercher le coefficient k tel que a'=ka etc. et calculer c tel que c'=kc; soit chercher entre a', b', c', d' des relations qui pourront être "transportées" sur a, b, c, d.

Ces propriétés sont représentables sous forme graphique. Les points de coordonnées (a,a'), (b,b'),… sont alignés sur une droite qui passe par l'origine.



$A = f(a)$

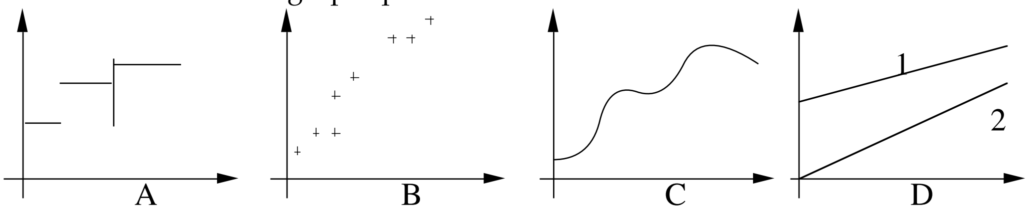
$f(ka) = k.\,f(a)$
$f(a+b) = f(a) + f(b)$

Mise en œuvre

On distingue principalement trois modèles.

1. Graphique. Représentation

Il convient d'abord d'illustrer les variations d'un phénomène en fonction d'un paramètre :
Selon l'axe Ox (horizontal : la variable); selon l'axe Oy (vertical) la fonction. Les représentations graphiques donnent lieu à des graphiques divers:



Ces représentations peuvent être étagées (A), ou en points isolés (B), ou en courbe continue (C), parmi lesquelles on peut reconnaître des droites (D), passant éventuellement par l'origine (D_2); *ce dernier type est caractéristique de la fonction linéaire.*

Exemples : poids d'un bébé (en Kg) en fonction de l'âge (en mois) [type C]
Affranchissement (en F) d'une lettre en fonction du poids (en g.) [type A]
Longueur des chaussures (en cm) en fonction de la pointure [type B]
Taille d'une plante, durée du jour au long de l'année, longueur d'un ombre à heure fixe
consommation d'essence d'une voiture, toutes situations d'achat de fournitures…
Période d'un pendule (simple) en fonction de sa masse ou de la longueur du fil;
durée de descente d'un plan incliné par une bille, en fonction du poids, du diamètre…
Variation du périmètre ou de l'aire d'un rectangle dont on fait varier un côté, ou les deux simultanément.
Quelques-uns de ces phénomènes répondent à une fonction linéaire (variation proportionnelle).

2. Manipulation de listes numériques

	A	B	C	D	E	F	G
X	12	15	21	48		51	?
Y	20	25	35	80		?	100

	E	F	G
	3	**51**	60
	5	85	**100**

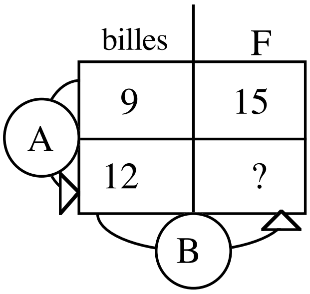
On dispose de deux listes numériques proportionnelles X et Y; on peut considérer par exemple que Y correspond aux valeurs de la variable X. Comment trouver le contenu des cases inconnues ?
On peut chercher **l'opérateur** (ou une chaîne d'opérateur) qui permet de passer de X à Y.
Mais on peut aussi traiter les listes X et Y d'après les propriétés de linéarité :
f (k ¥ x)=k ¥ f (x) On peut multiplier (ou diviser) une colonne par un nombre.
f (a+b)=f (a)+f (b) On peut ajouter (ou retrancher) deux colonnes.
Ainsi ci-dessus : la colonne E est établie en retranchant la colonne A de la colonne B.

La colonne F est obtenue en ajoutant les colonnes D et E
La colonne G est obtenue en multipliant la colonne A par 5 (ou la colonne B par 4)

Ces manipulations numériques peuvent être pratiquées indépendamment de significations concrètes (comme des jeux de calcul), ou bien à l'occasion de problèmes (les lignes X et Y représentent alors des mesures de grandeur).

3. Tableau de proportionnalité

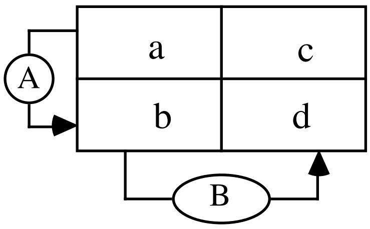
Il s'agit là d'une méthode pratique de résolution de problèmes (pour autant qu'on ait reconnu une situation de proportionnalité), et qui correspond à la pratique verbale traditionnelle de la "Règle de trois". Les grandeurs en jeu sont reconnues et disposées selon les colonnes d'un tableau carré, les données rangées dans les cases correspondantes (situation [1] ci-dessous).



[1] : Neuf billes coûtent 15F. Combien coûtent 12 billes ?

[2] : On achète 3Kg de pommes de terre à 8F le Kg…
[3] : On achète 3,75Kg de pommes de terre pour 10F…

Le traitement consiste à trouver l'un des opérateurs [A] ou [B] ou une chaîne équivalente, puis à compléter la dernière case. Ainsi, on peut considérer ci-dessus que l'opérateur A est "multiplier par 4/3". On en déduit le nombre 20 pour la case vacante.
Ce tableau permet de distinguer clairement les grandeurs (et les unités associées) des mesures (nombres) qui sont portées dans les cases. L'opérateur multiplicatif B est lié au "coefficient de proportionnalité" : il relie des grandeurs différentes. Par contre l'opérateur multiplicatif A associe des mesures de même espèce.
En pratique, il importe de trouver l'un de ces deux opérateurs, et mieux vaut le plus simple des deux.



$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad a.d = b.c \qquad \boxed{d = \frac{b.c}{a}}$$

En pratique encore, une **REGLE** permet de résoudre cette situation :
"Les produits en croix sont égaux" c'est à dire : 12 x 15 = 9 x "?"
Toutefois il faut observer que cette règle de calcul n'a pas de signification physique : elle n'est qu'une relation entre les nombres du tableau. Elle est d'un usage pratique aisé, mais ne saurait intervenir trop tôt (sans doute pas avant le Collège), ni se substituer à des manipulations de ce tableau liées aux grandeurs en jeu.
De plus il faut distinguer des cas où les relations à manier sont simples (comme dans l'exemple [2]) et autorisent le recours à l'unité, des situations moins simples ([3]) où la "réduction à l'unité" est moins naturelle.C'est la raison pour laquelle cette méthode semble mieux adaptée que la classique "Règle de Trois".

Situations complexes :
proportionnalités composées et proportionnalité inverse

Plusieurs grandeurs sont liées deux à deux par une relation de proportionnalité.

Grandeur A ⟷ Grandeur B ⟷ Grandeur C

Exemple 1: 6 hommes en 24 jours, travaillant 8 heures par jour ont fait 456 mètres d'ouvrage; on demande combien feront 5 hommes en 20 jours, travaillant 10 heures par jour.

De tels problèmes sont résolus par le tableau du type précédent, mais comportant 3 colonnes:

	hommes	ouvrage (m)	durée (h)
A	**6**	**456**	**190**
B	5	?	200
C	5	380	190
D	5	400	200

On passe deA à C en multipliant par 5/6 (3° colonne inchangée)
On passe de C à D en multipliant par 20/19 (1° colonne inchangée)

Exemple 2 : l'aire d'un rectangle est 24m²· Trouver l'aire d'un rectangle dont la largeur est la moitié, et dont la longueur est triple de celles de ce rectangle.

Les grandeurs S (aire), Lo (longueur), La (largeur) sont liées par la relation S = Lo. La
On dit qu'elle est bilinéaire. Il est possible de représenter des données, non sur un graphique, mais dans un tableau :

La \ Lo	2	4	6	8	10
1	2	4	6	8	10
2	4	8	12	16	20
3	6	12	18	24	30
4	8	16	24	32	40

Le tableau donne les aires

Proportionnalité inverse

Exemple : deux secrétaires mettent 8h pour taper 128 pages. Combien faudrait-il de temps à 3 secrétaires pour taper ces 128 pages ? pour taper 216 pages ?
La relation entre la durée et le nombre de personne est d'*inverse proportionnalité.*

REMARQUES.

1. La difficulté majeure des situations de proportionnalités est leur **repérage** : s'agit-il ou non de proportionnalité ? Un critère simple consiste à se demander ce qui se passe si l'on remplace une quantité par son double. Néanmoins, il est reconnu que le **modèle proportionnel** n'est sans doute pas maîtrisé avant la classe de 5° ou de 4°. Il est d'autant plus important de rendre la situation significative, et de proposer à l'occasion des situations de non-proportionnalité.

2. Toutes les activités de **représentation de données** (tableaux, graphiques…) constituent une bonne préparation à l'établissement de ce modèle.

3. Quelques cas particuliers (double et moitié) suscitent plus facilement l'intuition d'une proportionnalité. L'exemple du PUZZLE (CM2) l'illustre bien : passer de 4 cm à 8 cm induit une multiplication, alors que passer de 4 cm à 5 cm induit un modèle additif.

4. Les situations complexes (proportionnalités composées, ou inverses) n'ont pas lieu d'être traitées à l'école élémentaire.

Exemple de problèmes

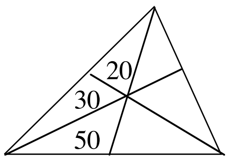
I. Dans une piscine, il y a deux bassins. Le petit bassin a pour dimensions (en mètres) :
15, 10 et 1,5. Le grand bassin : 25, 10 et 2,5. On remplit le petit à raison de 2m³ par 15 mn et le second à raison de 8m³ par 10mn. Lequel sera rempli le premier ?

II. Je donne deux pièces de 5F à l'un de mes enfants et à l'autre 3 pièces de 2F et 4 pièces de 1F, afin qu'ils s'achètent des bonbons. Le premier n'achète que des Carambars à 10c, tandis que l'autre n'achète que des malabars à 20c. Lequel aura le plus de bonbons ?

III. Pour décorer le sapin de Noël de la classe, nous avons besoin de décorations. Voici ce qui nous est proposé au supermarché :
1 grosse boule : 10F 5 grosses boules : 40F
3 guirlandes : 30F 10 guirlandes : 80F
4 petits paquets : 10F 15 petits paquets : 30F
3 personnages : 15F 10 personnages : 55F
Que vaut-il mieux acheter : – à l'unité ? - par petits lots ? - par gros lots ?

V. Patrick et Nicolas qui ont respectivement 5 ans et 6 ans ont décidé en ces fêtes de Noël de faire un concours d'Arbre de Noël. Ils ont chacun un sapin qu'ils doivent décorer le plus vite possible car la fête commence dès 19h. Il est déjà tard et ils piochent dans un panier de 250 guirlandes et 300 boules les décorations qui leur serviront. 2 heures plus tard, Nicolas a terminé : il a posé 15 guirlandes de 2 mètres. Une heure plus tard Patrick termine seulement avec 25 guirlandes de 2m. Combien de temps mettront-ils pour qu'il y ait 100 guirlandes sur les deux sapins ?

Problèmes divers.



Le triangle est partagé comme l'indique la figure.
On donne les aires de trois parties.
Trouver l'aire totale du triangle

A. Une personne laisse en héritage une somme de 620 730F à ses trois nièces qui ont respectivement 17, 15 et 11 ans. Elle veut qu'au premier jour de sa 18°année chaque nièce reçoive la même somme, sa part ayant été placée jusque là à intérêt simple, au taux de 4,5%. Calculer la part de chacune. (Brevet Sup)

B. Votre taille est de 1,40 m et votre ombre mesure 0,840 m. Au même moment l'ombre d'un arbre mesure 14,40m. Quelle est la hauteur de l'arbre ?

C. Un train de 80m de long roule d'une manière régulière et parcourt 1800 m par minute. Ce train traverse un tunnel et depuis le moment où la locomotive s'engage jusqu'au moment où le fourgon de queue sort, il s'est écoulé 2mn 30s. Quelle est la distance franchie par la locomotive pendant ce temps ? Quelle est la longueur du tunnel ? (C.M.)

D. Un jeune garçon a remarqué qu'à bicyclette il mettait, en moyenne, 1mn 30s pour faire 300m. Il habite à 5,400km de la gare; le train passe à 17h 12mn et il lui faut 15mn pour prendre son billet et faire enregistrer sa bicyclette. A quelle heure doit-il partir de chez lui pour prendre ce train ?

E. Arthur est sur un escalator; il monte 20 marches et arrive en haut en 15s. Bertrand, montant 22 marches, arrive en haut en 12s. Casimir descend le même escalator (à contre-sens). Il arrive en bas en 18 secondes. Combien a-t-il descendu de marches ?

F. Un père a 29 ans et son fils a 5 ans. Dans combien d'années l'âge du père sera-t-il le triple de l'âge de son fils ?

G. Dix-huit ouvriers ont mis 20 jours pour faire un ouvrage en travaillant 10 heures par jour; combien 15 ouvriers auraient-ils mis de jours à faire le même ouvrage en travaillant 8h par jour ?

H. On mélange 240 litres de vin à 13° et 144 litres de vin à 10°. Quel est le titre d'alcool du mélange?

I. Combien faut-il ajouter d'or pur à 136g d'un alliage d'or et de cuivre au titre de 0,845 pour porter l'alliage au titre légal de 0,900 ?

J. Le thermomètre Fahrenheit est encore utilisé en Grande Bretagne. L'échelle Fahrenheit indique 32 dans la glace fondante et 212 dans la vapeur d'eau bouillante.

Quelles sont les indications de la graduation Celsius correspondant au 0 et au 100 de l'échelle Fahrenheit ? A quelle température Celsius correspond Fahrenheit 451 ?

K. Vous êtes à la campagne alors que le tonnerre commence à gronder, et vous souhaitez connaître la distance à laquelle se trouve le nuage orageux. Vous n'avez pas de montre, mais votre pouls donne 90 pulsations à la minutes, et vous savez que le son parcourt 340m/s. Entre l'éclair et le bruit du tonnerre, vous comptez 26 pulsations. Quelle distance vous sépare du nuage orageux ?

L. Pour fabriquer un mortier, on mélange 5 parties de sable et 3 parties de chaux. Quelle quantité de chaque matière a-t-on employé pour obtenir 44 m^3 de mortier, si le mouillage occasionne une diminution de 1/5 en volume ?

M. Deux équipes d'ouvriers agricoles peuvent faucher l'herbe d'un pré, l'une en 9 jours et l'autre en 12 jours. Si l'on prend la moitié de la première équipe et le tiers de la seconde, en combien de jours le travail sera-t-il fait ? (Certif. d'Etude)

N. J'ai fait transporter 200 Kg de marchandise à 600Km pour 4500F; combien en ferait-on transporter à 900Km pour 6500F ?

O. Deux menuisiers ont entrepris la boiserie d'un appartement; le premier y a employé 8 ouvriers pendant 15 jours et le second 10 pendant 14 jours; on demande quelle part chacun doit avoir à proportion de sa dépense, sur 45000F que l'on destine à cet ouvrage.

P. Un aubergiste a 140 litres de vin à 9F et 250 litres à 12F; il voudrait mêler ces vins et gagner 0,5F par litre. Combien doit-il le vendre ?

Q. Un cycliste fait une ascension à une vitesse moyenne de 15Km/h. Puis il redescend selon le même parcours à la vitesse moyenne de 45Km/h. Quelle est la moyenne réalisée ? (illustrer par un graphique).

R. Albert creuse un trou en 3heures. Bernard creuse un trou identique en 5 heures. Combien mettraient-ils pour creuser ensemble un autre trou identique ?

S. On fond un alliage contenant 45% d'argent avec un alliage contenant 60% d'argent pour obtenir 4Kg d'un alliage contenant 48% d'argent. Quelles ont été les masses fondues ?

T. Une poule et demie pond un œuf et demi en un jour et demi. Combien une poule pond-elle en six jours ?

U. Après deux augmentations successives, la première de 12%, la seconde de 24%, un objet coûte 792F. Combien coûtait-il avant les deux augmentations ?

V. Dans une entreprise, on répartit une prime de 1200F entre trois employés proportionnellement à leur ancienneté; celles-ci sont respectivement de 3 ans, 5 ans et 7 ans. Calculer la part de chacun.

PROPORTIONNEL OU PAS ?

A. Envoyer une lettre de 20g coûte 2,80F…

B. J'ai 12 ans; mon père en a 36…

C. Mon pied mesure 28cm. Ma pointure est 42…

D. J'ai 48 ans; je père 76 Kg…

E. Une voiture qui roule à 120km/h a besoin de 100m pour s'arrêter…

F. Un caillou met 5s pour tomber de 5m…

G. Il faut 2mn pour porter l'eau d'une casserole à 50°. Et pour la faire bouillir ? Et pour deux fois plus d'eau ?

H. Une tarte pour 2 personnes a 12cm de diamètre. Et pour 4 personnes ?

I. Un autobus avec 4 personnes à bord pèse 2500Kg. Et avec 40 personnes ?

J. Un enfant de 4 ans mesure 1m et pèse 15 kg…

K. Jean et Pierre échangent des billes : 4 grosses billes contre 7 petites…

L. 7 dahlias et 4 œillets coûtent 32F ; 4 dahlias et 1œillet coûte 26F…

M. 2 lapins et 3 canards ont en tout 14 pattes et 6 ailes. Combien de lapins et de canards pour 20 pattes et 8 ailes ?

N. 12 morceaux de sucre pèsent 60g. Combien de morceaux pour 100g ?

O. J'ai mis 2h pour lire 72 pages. Il me reste 48 pages à lire …

P. Un litre d'essence coûte 5F. Combien coûte un "plein " de 42 litres ?

Q. Pour téléphoner 24s, on paye 75c. Combien paye-t-on pour 57s ?

R. Pour faire de la pâte à choux, il faut 125g de farine, 100g de beurre, 1/2 litre d'eau, 4 œufs, du sucre, du sel. Quelles quantité si l'on utilise 2 œufs ? 6 œufs ? 3 œufs ?

S. 6 caramels CAR coûtent 1,80F; 4 caramels MEL coûtent 1,30F. Quels sont les plus chers ?

T. Une agriculteur rentre 4 charrettes de foin en 3h. Combien de charrettes deux personnes peuvent-elles rentrer en 8h ?

U. 3 poules mangent 1,5 kg de grain par jour. Un poule pond en moyenne 15 œufs par mois. Combien de grain par jour et combien d'œufs par mois avec 500 poules ?

V. Le billet de train Albi-Toulouse coûte 45F pour 75km. Quel est le prix du billet pour une distance de 125km ? Combien peut-on parcourir avec 72F ?