Aide-mémoire pour l'épreuve de mathématiques du CRPE

Sommaire

EN CLIQUANT SUR UN INTITULE DE CE SOMMAIRE VOUS IREZ DIRECTEMENT A LA RUBRIQUE VOULUE

Division-partition
Division-quotition
Division euclidienne
Droite orthogonale à un plan
Droites orthogonales
Droites perpendiculaires
Droites parallèles
Durée (calcul d'une durée)
Écriture décimale
Écriture scientifique
Ensembles de nombres
Encadrement
Équation de droite
Équation du premier degré
"Équation-produit"
Étendue
Exposant (règles de calcul concernant les exposants)
Factorisation d'une expression
Figures homothétiques
Figures isométriques
Figures semblables
File numérique
Fonction
Fraction (ou écriture fractionnaire)
Fraction décimale
Fraction irréductible
Grandeurs
Hauteurs d'un triangle
Hexagone régulier (construction avec une règle et un compas)
Homothétie
Identités remarquables
Inéquation du premier degré à une inconnue
Inéquation du premier degré à deux inconnues
Isométrie
Loi de composition interne
Losange
Médiane d'un triangle
Médiatrice d'un segment
Médiatrices d'un triangle
Mesure
Milieu d'un segment
Multiple
Multiple commun à deux nombres entiers naturels
Multiplication (aide-mémoire concernant la technique opératoire)
Nombre d'entiers naturels situés entre deux entiers naturels n et p (n et p compris)
Nombre décimal (avec ajout)
Nombre irrationnel
Nombre premier
Nombre rationnel
Notations géométriques
Objectifs
Objet géométrique
Orthocentre d'un triangle
Parallélogramme

Parallélépipède
Parallélépipède droit
Parallélépipède rectangle (ou pavé droit)
Partage d'un segment en n segments de même longueur "à la règle et au compas"
Patron d'un polyèdre (exemple et recommandations)
Pavé droit
Périmètre (formulaire)
PGCD et PPCM
Polyèdre régulier
Polygone régulier
Pourcentages
PPCM
Prisme
Problèmes "additifs" au cycle 2
Problème "ouvert"
Procédure experte et procédure personnelle
Proportionnalité (rappels pour enseignants)
Propriétés de linéarité
Puissances
Pyramide
Pyramide régulière
Quadrilatères (familles de quadrilatères)
Quotients décimaux (exemple)
Racine carrée
Rangement
Rectangle
Registre sémiotique
Repérages dans l'espace
Rotation (exemple)
Rythme
Secteur circulaire
Segment de droite (notation)
Similitude
Situation-problème (signification accordée à cette expression en didactique des mathématiques)
Solide
Somme d'entiers consécutifs
Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique
Soustraction (techniques posées pour la soustraction avec retenue)
Surface
Sphère (formulaire)
Symétrie axiale (orthogonale)
Symétrie centrale
Symétrie glissée
Système de deux équations du premier degré à deux inconnues (exemples de résolution)
Système de deux inéquations du premier degré à deux inconnues (exemple)
Tableau à double entrée (différents types de tableau à double entrée)
Tangentes à un cercle (construction des tangentes à un cercle passant par un point donné extérieur au cercle)
Tétraèdre
Tétraèdre régulier
Théorème de Pythagore
Théorème de Thalès et théorème réciproque du théorème de Thalès
Théorème en acte (ou théorème-élève)

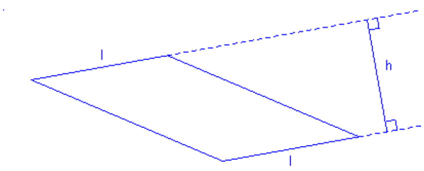
Aide-mémoire pour l'épreuve de mathématiques du CRPE

♦ Aire

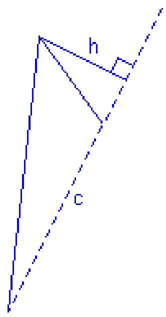
- L'aire est une grandeur attachée à une surface : c'est "la place qu'il y a à l'intérieur de la surface".
- Si on découpe une surface en morceaux et si on compose une nouvelle surface en utilisant tous ces morceaux, la nouvelle surface a même aire que la surface de départ.
- Unités usuelles :

	km²		hm²		dam²		m²		dm²		cm²		mm²
			ha	(daa)	a	(da)	ca						

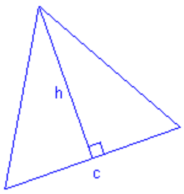
- Formulaire :



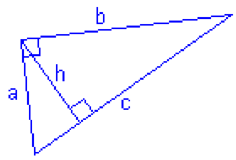
Parallélogramme :
Aire = l x h
(l étant la longueur d'un côté et h la hauteur "correspondant à ce côté")



Triangle :
$$\text{Aire} = \frac{c \times h}{2}$$
(c étant la longueur d'un côté et h la hauteur "correspondant à ce côté")

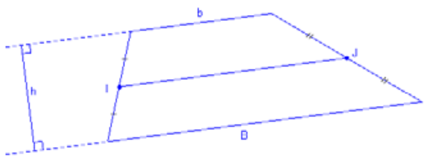


Triangle équilatéral :
$$\text{Aire} = \frac{c \times h}{2} = \frac{c \times \frac{c\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$$
(c étant la longueur des côtés)



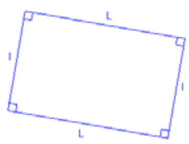
Triangle rectangle:
Première formule :
$$\text{Aire} = \frac{c \times h}{2}$$
(c étant la longueur de l'hypoténuse et h la hauteur "correspondant à l'hypoténuse")

Deuxième formule :
$$\text{Aire} = \frac{a \times b}{2}$$
(a et b étant les longueurs des côtés de l'angle droit)

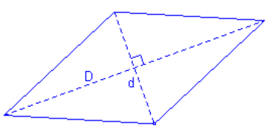


Trapèze :
$$\text{Aire} = \frac{B + b}{2} \times h$$
(B et b étant les longueurs des côtés parallèles et h la hauteur du trapèze)

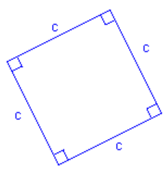
Aire = IJ × H
(I et J étant les milieux des deux autres côtés)



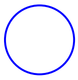
Rectangle :
Aire = L × l
(L étant la longueur et l la largeur)



Losange :
$$\text{Aire} = \frac{D \times d}{2}$$
(D et d étant les longueurs des diagonales)



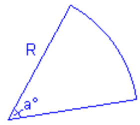
Carré :
Aire = c²
(c étant la longueur des côtés)



Disque :

Aire = $\pi R^2 = \dfrac{\pi D^2}{4}$

(R étant le rayon du disque et D son diamètre)



Secteur circulaire :

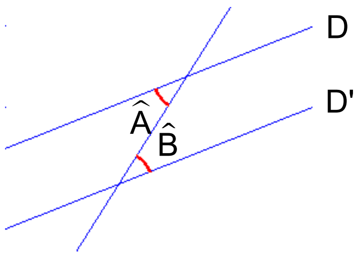
Aire = $\dfrac{\pi R^2 \times a}{360}$

(R étant le rayon du cercle et a° l'angle au centre)

♦ Algorithme

- Tâches élémentaires à mettre en oeuvre dans une situation donnée et leur enchaînement (exemple : algorithme de la multiplication posée)
- Quand on parle des mathématiques en maternelle, ce mot a, en général, une autre signification : on appelle suites algorithmiques (ou rythmes) les suites générées par un ensemble de règles appelé algorithme du type : une perle rouge, deux perles vertes, une perle rouge, deux perles vertes, etc.

♦ Angles alternes internes (ou angles alternés)

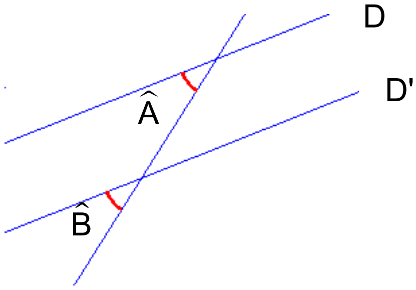


- Si les droites D et D' sont parallèles alors $\widehat{A} = \widehat{B}$.
- Si $\widehat{A} = \widehat{B}$ alors les droites D et D' sont parallèles.
- Si les droites D et D' sont parallèles, on dit que $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont des angles alternes internes.

♦ Angles complémentaires

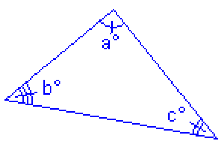
- Deux angles sont dits complémentaires quand la somme de leurs mesures en degré est égale à 90°.
- Exemple : les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires.

♦ Angles correspondants



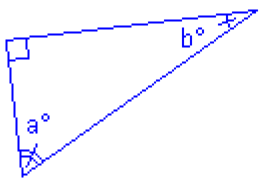
- Si les droites D et D' sont parallèles alors $\widehat{A} = \widehat{B}$.
- Si $\widehat{A} = \widehat{B}$ alors les droites D et D' sont parallèles.
- Si les droites D et D' sont parallèles, on dit que $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont des angles correspondants.

♦ Angles d'un triangle



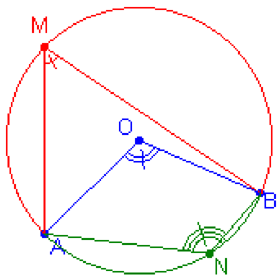
a° + b° + c° = 180 °

Cas particulier (triangle rectangle) :



a° + b° = 90°

♦ Angles inscrits dans un cercle



- Si A et B sont des points fixes du cercle et si M décrit l'arc de cercle "en rouge", la mesure de l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ reste constante.
- Si A et B sont des points fixes du cercle et si N décrit l'arc de cercle "en vert", la mesure de l'angle inscrit $\widehat{ANB}$ reste constante.
- La mesure de l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ est égale à la moitié de la mesure de l'angle au centre $\widehat{AOB}$.
- Les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont supplémentaires (la somme de leurs mesures vaut 180°).

♦ Angles supplémentaires

- Deux angles sont dits supplémentaires quand la somme de leurs mesures en degré est égale à 180°.

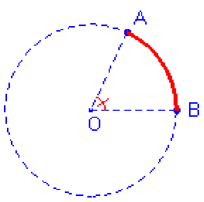
♦ Arbre de dénombrement

- Un arbre de dénombrement est un outil permettant de construire et/ou de dénombrer des éléments "fabriqués en faisant des choix successifs".
- Exemple : on cherche combien de nombres de trois chiffres tous différents on peut écrire en utilisant les chiffres 6, 8 et 9.

Possibilités pour le premier chiffre :	6 8 9
Possibilités pour le deuxième chiffre :	8 9 6 9 6 8
Possibilités pour le troisième chiffre :	9 8 9 6 8 6

Le nombre cherché est égal au nombre de "branches complètes" de l'arbre (ici 3 × 2 × 1)

♦ Arc de cercle



La longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est proportionnelle à la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$. Donc si la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ est égale à a° alors la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est égale à $\frac{\pi R \times a}{180}$ (R désignant le rayon du cercle).

♦ Aspect cardinal et aspect ordinal du nombre

- La construction du concept de nombre nécessite de comprendre que le nombre à deux aspects : un aspect cardinal (le nombre permet de représenter le nombre d'éléments d'une collection : "il y a trois jetons") et un aspect ordinal (le nombre permet de désigner la place d'un élément dans une collection ordonnée : "ce jeton est le troisième de la file")
- La construction du concept de nombre nécessite de comprendre qu'il y a un lien entre ces deux aspects du nombre : "à la fin du troisième jour du mois, il s'est écoulé trois jours depuis le début du mois".

♦ Associativité

- L'addition est associative :
  Pour tout nombre a, tout nombre b et tout nombre c, $a + (b + c) = (a + b) + c$
  Conséquence : on peut donc ne pas écrire les parenthèses.
- La multiplication est associative :
  Pour tout nombre a, tout nombre b et tout nombre c, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
  Conséquence : on peut donc ne pas écrire les parenthèses.

♦ Bases de numération (et changements de bases)

Système de numération positionnel de base quatre

On utilise quatre chiffres 0, 1 2 et 3

	En base quatre	En base quatre	En base dix
	0	zéro	0
•	1	un	1
••	2	deux	2
•••	3	trois	3
(••••)	10	une quatraine	4
(••••) •	11	une quatraine un	5
(••••) ••	12	une quatraine deux	6
(••••) •••	13	une quatraine trois	7
(••••) (••••)	20	deux quatraines	8
(••••) (••••) •	21	deux quatraines un	9
(••••) (••••) ••	22	deux quatraines deux	10
(••••) (••••) •••	23	deux quatraines trois	11
(••••) (••••) (••••)	30	trois quatraines	12
(••••) (••••) (••••) •	31	trois quatraines un	13
(••••) (••••) (••••) ••	32	trois quatraines deux	14
(••••) (••••) (••••) •••	33	trois quatraines trois	15
•••• •••• •••• ••••	100	une seizaine	16
•••• •••• •••• •••• •	101	une seizaine un	17
etc	etc	etc	etc

Système de numération positionnel de base douze

On utilise douze chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 , A, B.

	En base douze	En base douze	En base dix
	0	zéro	0
•	1	un	1
••	2	deux	2
•••	3	trois	3
••••	4	quatre	4
•••••	5	cinq	5
••••••	6	six	6
•••••••	7	sept	7
••••••••	8	huit	8
•••••••••	9	neuf	9
••••••••••	A	dix	10
•••••••••••	B	onze	11
••••••••••••	10	une douzaine	12
•••••••••••• •	11	une douzaine un	13
•••••••••••• ••	12	une douzaine deux	14
•••••••••••• •••	13	une douzaine trois	15
•••••••••••• ••••	14	une douzaine quatre	16
•••••••••••• •••••	15	une douzaine cinq	17
etc	etc	etc	etc

Changements de base

Pour passer d'une écriture dans une autre base que la base dix à une écriture en base dix (c'est facile) :

Exemple :

$(3102)_{quatre} = 3\times4^3 + 1\times4^2 + 0\times4^1 + 2 = 3\times64 + 1\times16 + 2 = 210$

Pour passer d'une écriture en base dix à une écriture dans une autre base que la base dix (c'est plus difficile) :

Exemple :

On veut écrire 1257 en base huit.

Explications « complètes » :

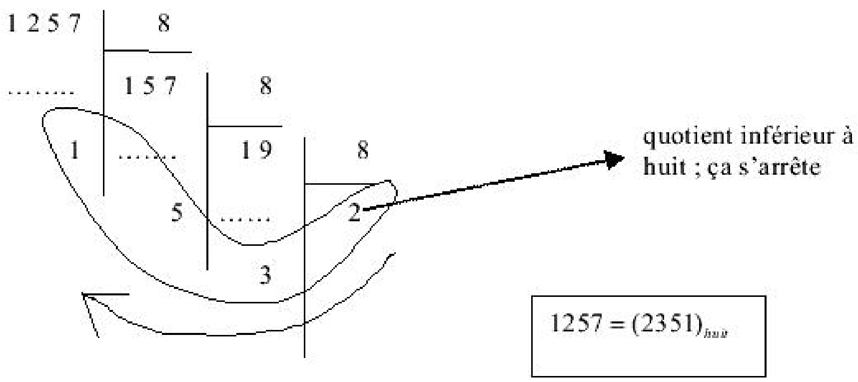
On effectue la division euclidienne de 1257 par 8 :
$1257 = 157 \times 8 + 1$
1 est le chiffre de la première colonne en partant de la droite (chiffre des unités) en base huit

On effectue la division euclidienne de 157 par 8 :
$157 = 19 \times 8 + 5$ donc $1257 = (19 \times 8 + 5) \times 8 + 1 = 19 \times 8^2 + 5 \times 8 + 1$
5 est le chiffre de la deuxième colonne en partant de la droite (chiffre des « huitaines ») en base huit

On effectue la division euclidienne de 19 par 8 :
$19 = 2 \times 8 + 3$ donc $1257 = (2 \times 8 + 3) \times 8^2 + 5 \times 8 + 1 = 2 \times 8^3 + 3 \times 8^2 + 5 \times 8 + 1$
3 est le chiffre de la troisième colonne en partant de la droite en base huit
2 est le chiffre de la quatrième colonne en partant de la droite en base huit

Donc $1257 = (2351)_{huit}$

Méthode « pratique »

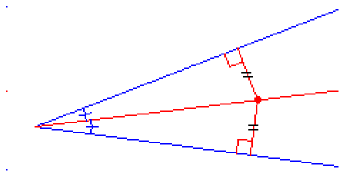


$1257 = (2351)_{huit}$

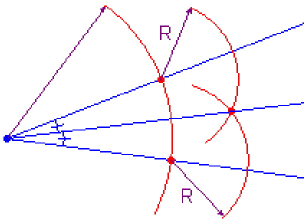
Remarque : $(2,104)_{\text{base cinq}} = \left(\dfrac{2104}{1000}\right)_{\text{base cinq}}$

♦ **Bissectrice d'un angle**

- La bissectrice d'un angle est la demi-droite partageant cet angle en deux angles égaux
- Les points de la bissectrice d'un angle sont les points (du secteur angulaire correspondant à l'angle) qui sont situés à même distance des deux côtés de l'angle :

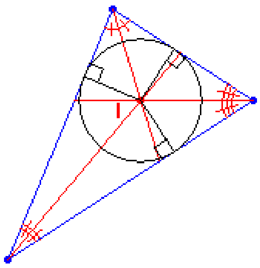


- Construction "à la règle et au compas" de la bissectrice d'un angle :



♦ **Bissectrices (intérieures) d'un triangle**

- Les bissectrices (intérieures) d'un triangle sont les bissectrices des angles de ce triangle.
- Les trois bissectrices intérieures d'un triangle se coupent en un même point I qui est le centre du cercle inscrit dans ce triangle, c'est-à-dire du cercle tangent (intérieurement) aux trois côtés du triangle :



♦ **Calcul automatisé**

- Utilisation, dans une situation donnée, d'un algorithme unique, ne dépendant pas des nombres en jeu, pour trouver un résultat.
Exemple : algorithme de la multiplication posée.
- Le calcul automatisé est utilisé en général à l'écrit mais on peut envisager d'apprendre certaines règles de calcul automatisé utilisables mentalement (exemple : utilisation pour calculer mentalement le produit d'un nombre par 25 de la règle : "pour multiplier par 25, on multiplie par 100 et on divise par 4").

♦ **Calcul et comptage**

- Dans des situations d'ajout, de retrait, de partage, de regroupement, … on peut prévoir le résultat en utilisant des procédures de comptage (on dispose d'objets ou on imagine mentalement des objets que l'on peut dénombrer) ou des procédures de calcul (on utilise uniquement des écritures chiffrées).
- Pour pouvoir faire un calcul, il faut avoir mémorisé certains résultats (exemple : "5 plus 7 est égal à douze") et avoir mémorisé certaines techniques de calcul (exemple : algorithme de l'addition posée).
- On peut distinguer différentes techniques de comptage.
Exemples : pour trouver à quoi est égal 4 + 6, je peux construire une collection de quatre "objets" (doigts par exemple) puis une collection de six "objets" puis réunir les deux collections et dénombrer le tout (technique de "recomptage du tout") ; je peux aussi "garder le nombre quatre en tête" et construire simplement une collection de six objets en disant "cinq, six, sept, huit, neuf, dix" (technique de surcomptage).

♦ **Calcul instrumenté**

- Utilisation d'une calculatrice ou d'un tableur pour effectuer un calcul

♦ **Calcul réfléchi**

- Utilisation, dans une situation donnée, d'une procédure qui dépend des nombres en jeu … et de la personne qui fait les calculs. On calcule en s'adaptant aux nombres en jeu :

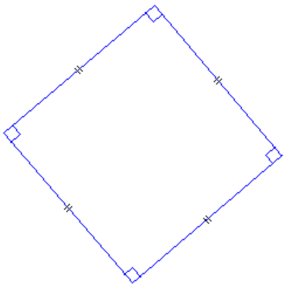
12 x 25 = 3 × 4 x 25 = 3 × 100 = 300
14 x 25 = 7 x 2 x 25 = 7 × 50 = 350]

- On peut effectuer un calcul réfléchi mentalement (le calcul mental fait souvent appel au calcul réfléchi) mais aussi par écrit

♦ **Capacité ou contenance** *(voir la rubrique Volume de cet aide-mémoire)*

- Le volume "d'un solide creux" est appelé capacité ou contenance

♦ **Carré**



- Un quadrilatère est un carré si et seulement si il admet quatre côtés de même longueur et au moins un angle droit.
- Un quadrilatère est un carré si et seulement si c'est en même temps un rectangle et un losange.
- Un quadrilatère est un carré si et seulement si ses diagonales ont même milieu, ont même longueur et sont perpendiculaires.
- Si on appelle c la longueur d'un côté, p le périmètre et A l'aire :

$$p = 4 \times c \text{ et } A = c^2$$

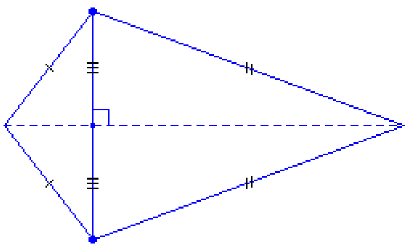
♦ **Centre de gravité d'un triangle : voir la rubrique *Médianes d'un triangle* de cet aide-mémoire**

♦ **Cercle circonscrit à un triangle : voir la rubrique *Médiatrices d'un triangle* de cet aide-mémoire**

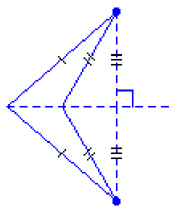
♦ **Cercle inscrit dans un triangle : voir la rubrique *Bissectrices (intérieures) d'un triangle* de cet aide-mémoire**

♦ **Cerf-volant**

Cerf-volant convexe



Cerf-volant concave



- Un quadrilatère est un cerf-volant si et seulement si il admet une de ses diagonales comme axe de symétrie
- Un quadrilatère est un cerf-volant si et seulement si il admet deux côtés consécutifs de même longueur et les deux autres côtés ont aussi même longueur.

♦ **Classement et tri**

- Classer c'est réaliser une partition d'un ensemble en plusieurs sous-ensembles en fonction d'un critère (exemples de critère possible : couleur, forme, etc.)
- Trier c'est réaliser une partition d'un ensemble en deux sous-ensembles (dont l'un est "privilégié") (exemple : objets rouges – objets non rouges)

♦ **Coefficient de proportionnalité : voir la rubrique *Proportionnalité* de cet aide-mémoire**

♦ **Commutativité**

- L'addition est commutative : pour tout nombre a et tout nombre b, a + b = b + a.
- La multiplication est commutative : pour tout nombre a et tout nombre b, a × b = b × a.

♦ **Comparaisons directes, comparaisons indirectes et mesurages**

- Cette rubrique concerne toutes les grandeurs (voir rubrique *Grandeurs* de cet aide-mémoire)
- Explications données en prenant comme exemple la longueur :

Si on met côte à côte deux segments pour voir quel est le plus long, on fait une comparaison directe.

Si on veut comparer la longueur d'un bureau et d'une table qui ne sont pas dans la même pièce, on peut utiliser une grande baguette en bois, reporter sur cette baguette la longueur du bureau (on met un repère sur la baguette) puis aller dans l'autre pièce et comparer avec la longueur de la table. On dit qu'on fait une comparaison indirecte.

Remarque importante : jusqu'ici on n'a pas mesuré des longueurs, on a uniquement comparé des longueurs (on n'a pas eu recours aux nombres).

Mesurer la longueur du bureau, c'est choisir un objet étalon (par exemple une petite baguette en bois) et donc une unité de longueur (la longueur de cet objet étalon) et chercher combien de fois il faut reporter la longueur de l'objet étalon pour obtenir la longueur du bureau. Le résultat du mesurage est un nombre.

Bien entendu, on utilise, en général, l'unité légale de mesure des longueurs, qui est le mètre, et les multiples et sous-multiples de cette unité de longueur.

♦ **Compétences et objectifs**

- Les définitions de ces deux termes varient d'un auteur à l'autre.

- Dans les sujets de mathématiques de l'épreuve d'admissibilité du concours, en principe

- quand on parle de compétence on se place du point de vue de l'élève. Pour avoir des exemples de compétences (qui sont soient des savoirs soit des savoir-faire), il suffit de lire, dans les programmes, les compétences à acquérir pour chacun des cycles.
Exemple : l'élève doit savoir associer les désignations chiffrées et orales des nombres.

- quand on parle d'objectif on se place du point de vue du maître.
Exemple : le maître veut faire comprendre aux élèves l'intérêt de faire des paquets de 10.

Remarque :
Le maître a souvent pour objectif de faire acquérir une compétence donnée...
Mais, il peut aussi avoir pour objectif de faire émerger les conceptions initiales, d'apporter une aide spécifique à certains élèves en difficulté, etc.

♦ **Comptine numérique (ou "suite des mots-nombres")**

- Suite des mots représentant les nombres entiers : "un", "deux", "trois", etc.

♦ Comptage : voir la rubrique *Calcul et comptage* de cet aide-mémoire

♦ Condition nécessaire

- Si une proposition P ne peut être vérifiée que lorsqu'une certaine condition est vérifiée on dit que cette condition est une condition nécessaire pour que P soit vérifiée.
- Exemple : pour les entiers naturels, "avoir une écriture décimale qui se termine par un chiffre pair" est une condition nécessaire pour pouvoir être un multiple de 4.

Remarque : cette condition n'est pas suffisante puisque 14 a une écriture décimale qui se termine par un chiffre pair et pourtant 14 n'est pas un multiple de 4.

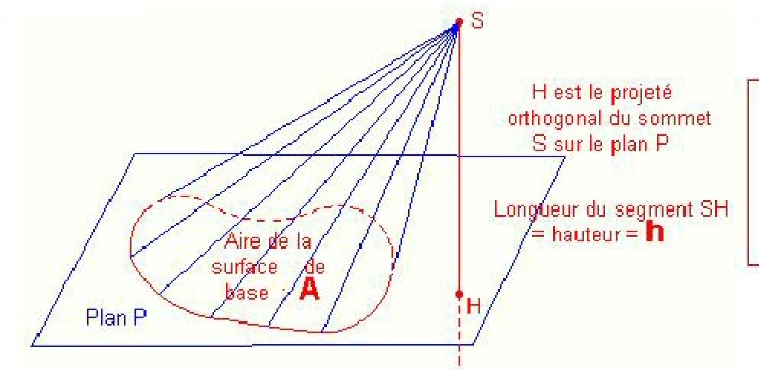
♦ Condition suffisante

Si une proposition P est automatiquement vérifiée lorsqu'une certaine condition est vérifiée on dit que cette condition est une condition suffisante pour que P soit vérifiée.

- Exemple : pour les entiers naturels, "avoir une écriture décimale qui se termine par 20" est une condition suffisante pour pouvoir être un multiple de 4.

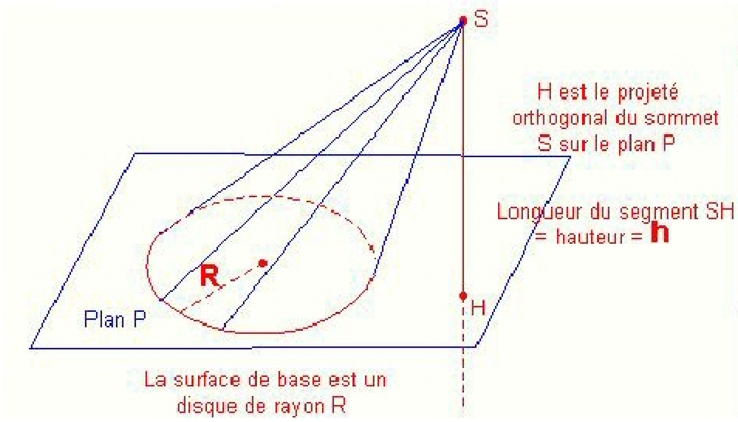
Remarque : cette condition n'est pas nécessaire puisque 132 est un multiple de 4 alors que son écriture décimale ne se termine pas par 20.

♦ Cône



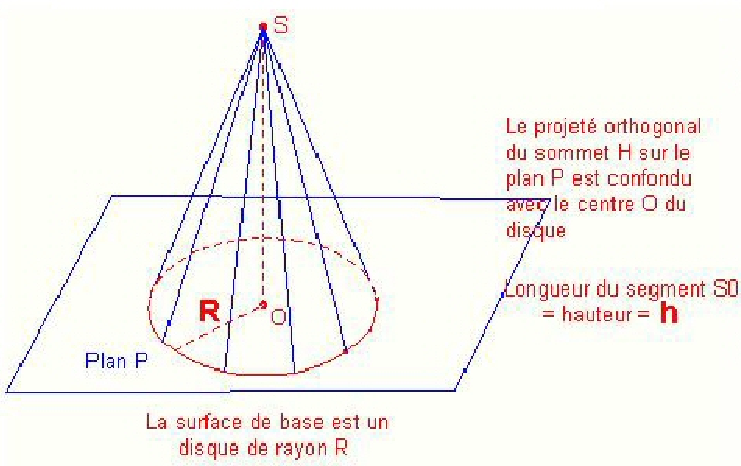
$$V = \frac{1}{3} \times A \times h$$

Cône cylindrique



$$V = \frac{1}{3} \times A \times h$$
$$= \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times h$$

♦ Cône cylindrique droit (ou cône de révolution)



$$V = \frac{1}{3} \times A \times h$$
$$= \frac{1}{3} \times \pi R^2 \times h$$

♦ Contraposée d'un théorème

- Tout théorème du type "si P est vrai alors Q est vrai" peut être remplacé par le théorème "si Q est faux alors P est faux". On dit que ce deuxième théorème est la forme contraposée du théorème initial)
- Exemple : pour les entiers naturels, le théorème "si l'écriture décimale de x se termine par 0 alors x est pair" peut être remplacé par le théorème "si x n'est pas pair alors l'écriture décimale de x ne se termine pas par un 0"
- Ne pas confondre forme contraposée d'un théorème et théorème réciproque d'un théorème (pour notre exemple le théorème réciproque du théorème de départ s'énoncerait "si x est pair alors l'écriture décimale de x se termine par un 0" mais ceci est FAUX).

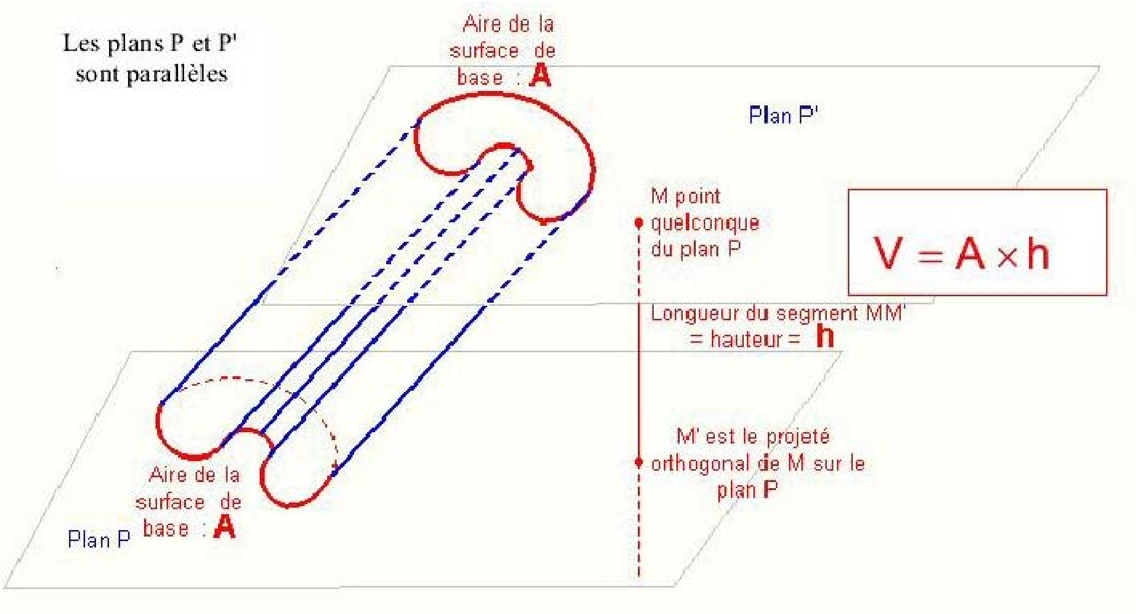
♦ Critères de divisibilité

- Un nombre est divisible par 2 si et seulement si le dernier chiffre est divisible par 2.
- Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre est divisible par 4 si et seulement si les deux derniers chiffres représentent un nombre divisible par 4.
- Un nombre est divisible par 5 si et seulement si le dernier chiffre est divisible par 5 donc si et seulement si le dernier chiffre vaut 0 ou 5.
- Un nombre est divisible par 8 si et seulement si les trois derniers chiffres représentent un nombre divisible par 8.
- Un nombre est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9
- Un nombre est divisible par 11 si et seulement si la somme d'un chiffre sur deux à partir des unités moins la somme des chiffres restant est divisible par 11.
- Un nombre est divisible par 25 si et seulement si les deux derniers chiffres représentent un nombre divisible par 25.
- Remarque :

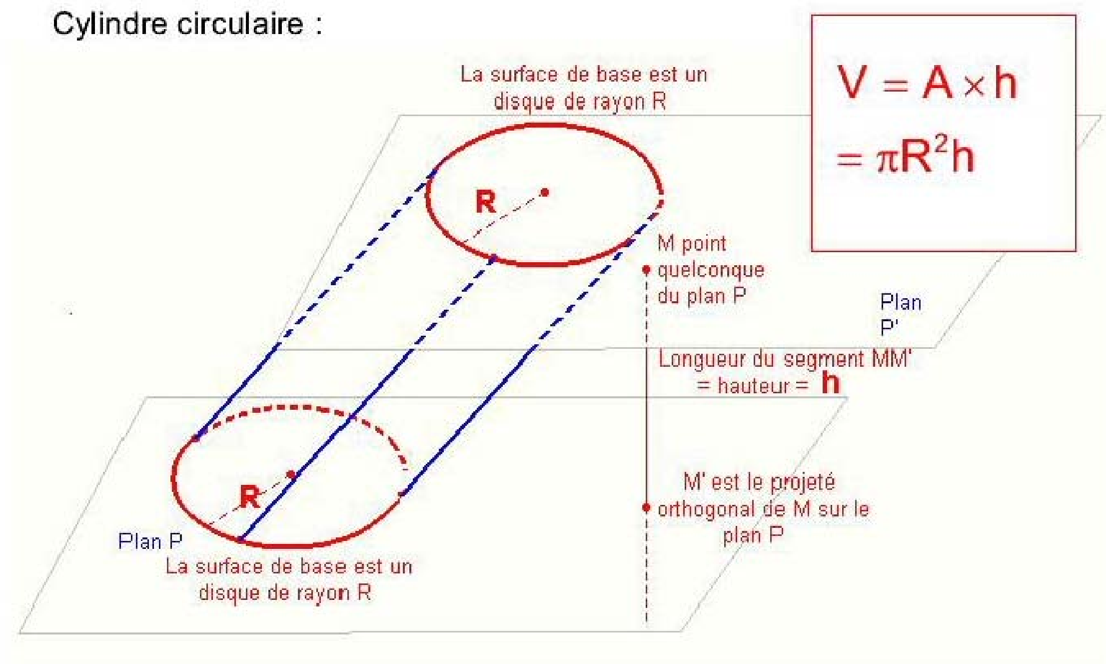
  Si un nombre est divisible en même temps par 8 et par 9 alors ce nombre est divisible par 8 × 9 c'est-à-dire par 72 mais ceci est vrai car 8 et 9 sont premiers entre eux (8 et 9 n'ont pas d'autre diviseur commun que 1).

  Mais ce n'est pas parce qu'un nombre est divisible en même temps par 4 et par 18 qu'il est nécessairement divisible par 72 car 4 x 18 = 72 mais 4 et 18 ne sont pas premiers entre eux (ils sont tous deux divisibles par 2). Et effectivement 36 est divisible par 4 et par 18 sans être divisible par 72.

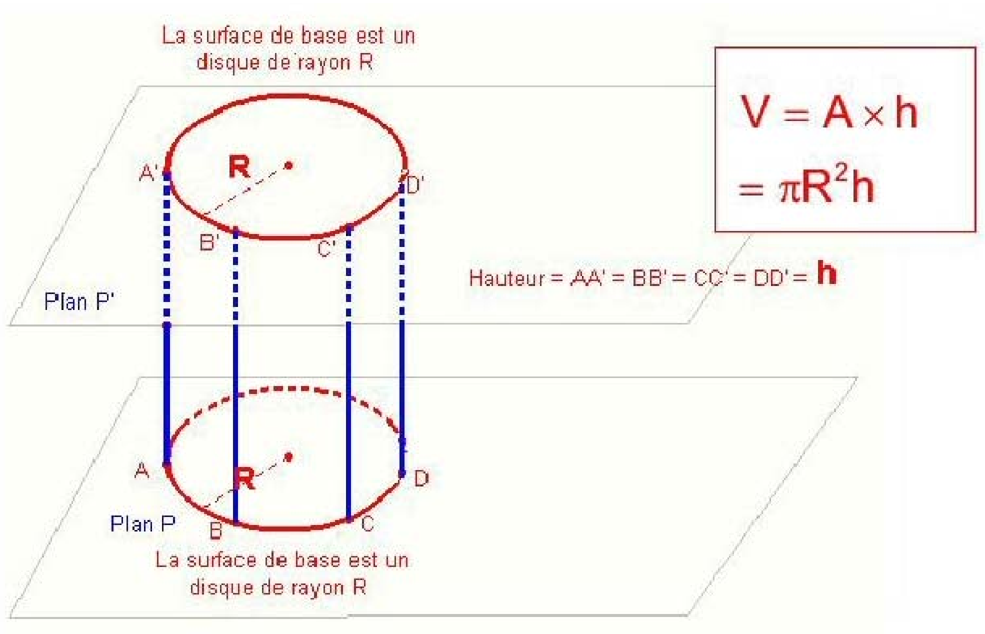
♦ **Cylindre :**



♦ **Cylindre circulaire :**

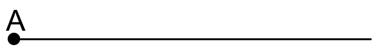


♦ Cylindre circulaire droit (ou cylindre de révolution) :

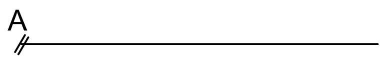


♦ Demi-droite fermée et demi-droite ouverte

- La demi-droite fermée d'origine A contient le point A :



- La demi-droite ouverte d'origine A ne contient pas le point A :



♦ Débit (d'un robinet)

- Si un robinet laisse s'écouler un volume V pendant un temps t, le débit d du robinet est donné par la formule $d = \frac{V}{t}$ (si V est en l et t en s le débit est en l/s).
- Si deux robinets fonctionnent en même temps, le débit de l'ensemble est égal à la somme des débits.

♦ Décomposition d'un nombre entier naturel en un produit de nombres premiers *(voir aussi la rubrique Nombre premier de cette aide mémoire)*

- Tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 peut être écrit de manière unique sous la forme $p^a \times q^b \times r^c \times ....$ p, q, r,... étant des nombres premiers et a, b, c,... étant des nombres entiers positifs. Cette écriture est appelée décomposition de n en un produit de nombres premiers.

- Méthode pour trouver la décomposition d'un entier naturel n en un produit de facteurs premiers : quand c'est possible, on divise n autant de fois qu'on peut par 2, puis on recommence avec 3, puis on recommence avec 5, puis on recommence avec 7 puis on recommence avec etc. (en utilisant la suite des nombres premiers 2, 3, 5, 7,...) et on continue tant que le nombre premier par lequel on essaie de diviser n est inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Exemple :
40 656 = 2 × 20 328 = 2 × 2 × 10 164 = 2 × 2 × 2 × 5 082 = 2 × 2 × 2 × 2 × 2 541 =
$2^4 \times 2\,541 = 2^4 \times 3 \times 847 = 2^4 \times 3 \times 7 \times 121 = 2^4 \times 3 \times 7 \times 11 \times 11 = 2^4 \times 3 \times 7 \times 11^2$

♦ Démarche d'apprentissage (exemple d'une démarche d'apprentissage possible)

- Les propositions suivantes, que chacun pourra adapter, s'inscrivent dans une conception constructiviste des apprentissages. On pourra, bien sur, faire un autre choix, soit de façon générale soit pour telle ou telle notion. Le mot « séquence » renvoie ici soit à une séance soit, le plus souvent, à un ensemble de plusieurs séances.

- Après avoir choisi une progression d'ensemble concernant tel ou tel domaine du programme de mathématiques, on bâtira chacune des séquences s'insérant dans cette progression en précisant clairement un objectif général propre à cette séquence (qui pourra, par exemple, être formulé de la manière suivante : « faire en sorte que l'élève soit capable de... »).

- Une séquence se compose de différents moments. On pourra, par exemple, prévoir les phases suivantes (le nombre de phases et le vocabulaire peut varier d'un formateur à l'autre...), en ne manquant pas de s'appuyer sur les conceptions initiales des élèves que l'on aura pris soin de faire émerger.

1 °) Une phase « introductive » (ou « de motivation »)
Cette phase « de mise en ambiance » débouche sur une situation (éventuellement ludique) qui pose problème
(les connaissances des élèves s'avèrent insuffisantes pour résoudre immédiatement le problème posé mais le maître va faire en sorte que le problème posé apparaisse clairement à l'élève, qu'il ait du sens pour l'élève ; que celui-ci puisse envisager ce qu'est une réponse possible...).
Remarque : les didacticiens parlent de *phase de dévolution* du problème pour indiquer qu'il faut faire en sorte que le problème posé devienne le problème de l'élève.

2°) Une phase « d'action » (ou « de recherche »)
Durant cette phase, l'élève, seul ou en groupes de deux ou en plus grands groupes (« de niveaux » ou non), cherche une solution à la situation qui lui pose problème. Il est confronté à un obstacle et ne peut répondre au problème en se préoccupant uniquement de ce que le maître attend de lui, par simple analogie avec des situations déjà rencontrées. Il produit des actions, est amené à choisir une stratégie, à la modifier en cas d'échec et en définitive à faire évoluer ses connaissances et à en construire de nouvelles sous la forme d'outils utiles pour essayer de résoudre le problème posé (ce qui implique que la situation soit choisie de façon à ce que les connaissances qui sont l'objet de l'apprentissage fournissent les outils le mieux adaptés pour obtenir la solution; remarque : ceci correspond au sens dans lequel les didacticiens utilisent le mot «situation-problème»).
Le maître observe, analyse les procédures, se rend compte des difficultés. S'il peut lui arriver de donner une indication à un élève ou un groupe qui est complètement bloqué, il évite soigneusement de donner la réponse complète au problème posé.

3°) Une phase «de mise en commun »
Durant cette phase collective, les élèves présentent leurs différents travaux, expliquent comment ils ont procédé... Il est important de recueillir toutes les réponses, les « justes » comme les «fausses»
Remarque : les didacticiens parlent de *phase de formulation*.

4°) Une phase de validation
Les élèves donnent leurs opinions sur les différents travaux puis il s'agit, avec l'aide du maître, de se mettre d'accord pour savoir si les différentes solutions sont bonnes ou pas (ce qui est intéressant c'est quand la situation proposée permet une auto validation ; ce n'est alors pas le maître qui décide seul de ce qui est exact ou de ce qui ne l'est pas...).
Durant les discussions, l'enseignant est attentif au vocabulaire utilisé et pourra être amené à introduire un vocabulaire correct pour assurer les échanges...

5°) Une phase « de structuration »
Le maître, avec les élèves, fait une synthèse claire de ce qu'il faut retenir. Dans cette phase les nouvelles connaissances qui étaient des outils commencent à devenir des objets d'étude (les outils sont décontextualisés de façon à pouvoir servir dans d'autres situations).
Il est important qu'il y ait une trace écrite de cette synthèse (dans un cahier de règles ou sur un panneau ou dans un album collectif en maternelle ou...).
Remarque : les didacticiens parlent de *phase d'institutionnalisation* car les nouvelles connaissances deviennent les connaissances de la classe ; elles deviennent institutionnelles.

6°) Une phase « d'application » ou de « réinvestissement » (certains parlent aussi de « consolidation »)
L'élève est amené à mettre en oeuvre, individuellement ou en petits groupes, ce qu'il vient d'acquérir soit dans le même contexte soit dans un contexte différent (on peut alors parler de recontextualisation).

7°) Une phase « d'évaluation »
Il semble préférable que cette phase d'évaluation, individuelle, ne se situe pas immédiatement après l'introduction de la notion nouvelle mais, quelques temps après, de façon à voir s'il y a bien eu mémorisation.

8°) Une phase de « remédiation » éventuelle (suivie d'une nouvelle phase d'évaluation...)

♦ Dénombrement des éléments d'une collection

- Dénombrement : activité qui consiste à trouver le nombre des éléments d'une collection.

- Cas particuliers de dénombrement :
  - Dénombrement par comptage : activité qui consiste à trouver le nombre des éléments d'une collection en utilisant un numérotage (on établit une correspondance entre une partie de la suite des mots-nombres, donc une partie de la comptine numérique, et les éléments de la collection) et en accordant une importance particulière au dernier mot-nombre prononcé.

  - Dénombrement en utilisant des « collections-témoins organisées » (configurations spatiales de points appelées constellations ou configurations digitales ou ...).

  - Dénombrement par reconnaissance instantanée pour les petites collections.

♦ Développement d'une expression

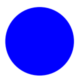
- Développer une expression consiste à remplacer un produit de facteurs par une somme de termes.
- Exemple : $(3x-5)(2x-3)=6x^2-9x-10x+15$

♦ Dialectique outil objet

- Quand on cherche à résoudre un problème, on peut être amené à construire, dans un contexte donné, des outils nouveaux pour résoudre le problème posé. Par la suite ces outils deviendront éventuellement eux-mêmes objets d'étude (ce qui s'accompagnera d'une décontextualisation...). Les nouvelles connaissances seront alors disponibles et pourront servir d'outils pour résoudre, par la suite, dans d'autres contextes, d'autres problèmes (on pourra parler de recontextualisation...).

♦ Disque

- Le disque de centre O et de rayon R est la surface constituée par l'ensemble des points du plan qui vérifient $0 \le OM \le R$ (remarque : cette définition correspond, en fait, au disque fermé de centre O et de rayon R ; pour le disque ouvert de centre O et de rayon R, il faut remplacer $0 \le OM \le R$ par $0 \le OM < R$).

- L'aire d'un disque de rayon R 

vaut πR^2 (cette aire est égale $\frac{\pi D^2}{4}$ si on appelle D le rayon du disque).

♦ Distributivité

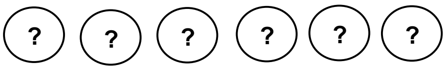
- La multiplication est distributive par apport à l'addition : pour tout nombre a, tout nombre b et tout nombre c, l'égalité suivante est vérifiée : $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ (remarque : la multiplication est également distributive par rapport à la soustraction).
- Remarque : en algèbre, passer de $a \times (b + c)$ à $(a \times b) + (a \times c)$ c'est développer une expression alors que passer de $(a \times b) + (a \times c)$ à $a \times (b + c)$ c'est factoriser une expression.

♦ Diviseur *(voir aussi la rubrique "Multiple" et la rubrique "PGCD et PPCM" de cet aide-mémoire en particulier 6°)*

- Un nombre entier p est un diviseur d'un nombre entier n si n est un multiple de p c'est-à-dire si on peut trouver un entier k tel que n = k × p (on dit alors que n est divisible par p).
Exemple : les diviseurs de 12 sont les nombres 1, 2, 3, 4, 6 et 12.
- Un nombre entier p est un diviseur d'un nombre entier n si le reste de la division euclidienne de n par p est égal à 0.
- Si la décomposition en un produit de facteurs premiers d'un nombre entier n est de la forme $p^a \times q^b \times r^c \times ...$ alors le nombre de diviseurs de n est égal à (a+1)×(b+1)×(c+1)×...

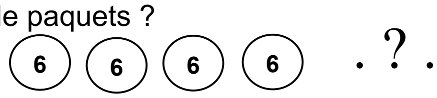
♦ Division-partition

- Division intervenant dans une situation de partage (ou de distribution) : on connaît le nombre de "parts" et on cherche la valeur d'une "part".
- Exemple : On dispose de 45 bonbons à partager équitablement entre 6 enfants ? Combien chaque enfant aura-t-il de bonbons ?



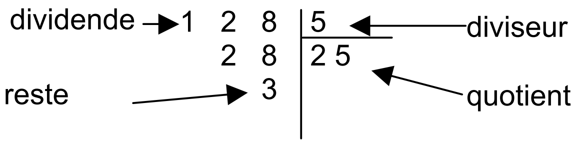
♦ Division-quotition

- Division intervenant dans une situation regroupement : on connaît la valeur d'une "part" et on cherche le nombre de "parts".
- Exemple : On dispose de 45 bonbons. On désire fabriquer des paquets de 6 bonbons. Combien peut-on fabriquer de paquets ?



♦ Division euclidienne

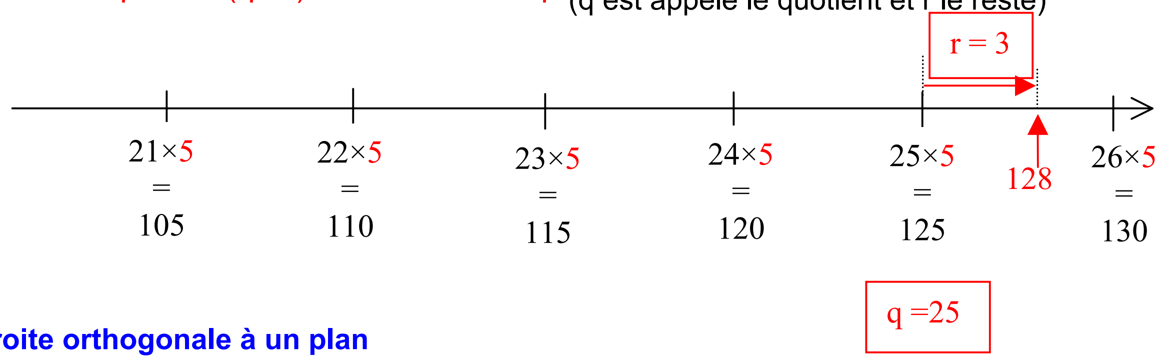
- La division euclidienne est une opération très particulière puisque, à un couple d'entiers, elle n'associe pas (comme l'addition, la multiplication et la soustraction) un entier mais un couple d'entiers : (quotient, reste).



- Écritures correctes : 128 = 25 × 5 + 3 $\frac{128}{5} = 25 + \frac{3}{5}$ voire même : 128 : 5 = 25 + (3 : 5)
- Il y a deux définitions possibles équivalentes pour la division euclidienne de a par b :

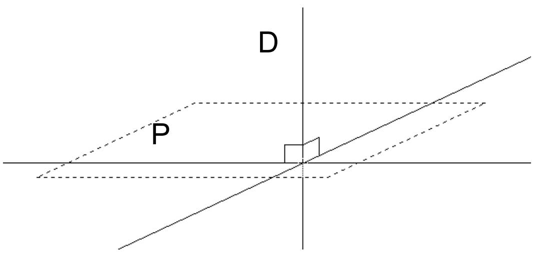
<u>Première définition possible</u> : effectuer la division euclidienne d'un entier positif ou nul a (appelé dividende) par un entier positif b (appelé diviseur) c'est trouver l'unique couple d'entiers (q,r) qui vérifie :
$a = bq + r$ ET $0 \le r < b$ (q est appelé le quotient et r le reste)

<u>Deuxième définition possible</u> : effectuer la division euclidienne d'un entier positif ou nul a (appelé dividende) par un entier positif b (appelé diviseur) c'est trouver l'unique couple d'entiers (q,r) qui vérifie :
$bq \le a < b(q+1)$ ET $r = a - bq$ (q est appelé le quotient et r le reste)

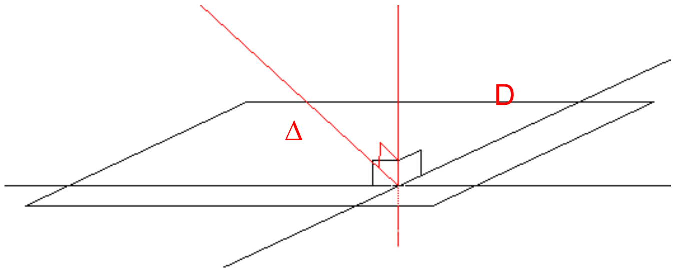


♦ Droite orthogonale à un plan

- Si une droite D est perpendiculaire (ou même orthogonale) à deux droites non parallèles d'un plan P alors la droite D occupe une position particulière par rapport au plan P : on dit qu'elle est orthogonale au plan P.



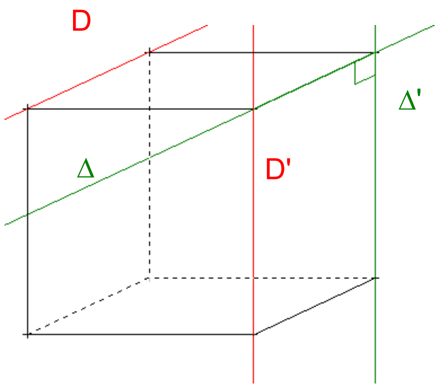
• Propriété : si une droite D est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale (voire perpendiculaire) à toute droite Δ de ce plan



♦ Droites orthogonales

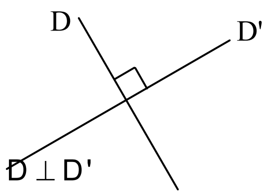
• On appelle droites orthogonales des droites D et D' qui sont non coplanaires mais telles qu'on puisse construire des droites Δ et Δ' vérifiant Δ // D et Δ' // D' et Δ ⊥ Δ'

- Exemple :



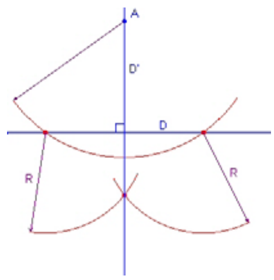
♦ Droites perpendiculaires

• Deux droites sont perpendiculaires si elles sont sécantes et se coupent "à angle droit" :



• On note : D ⊥ D'

Construction de la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné :



♦ Droites parallèles

• Deux droites sont parallèles si

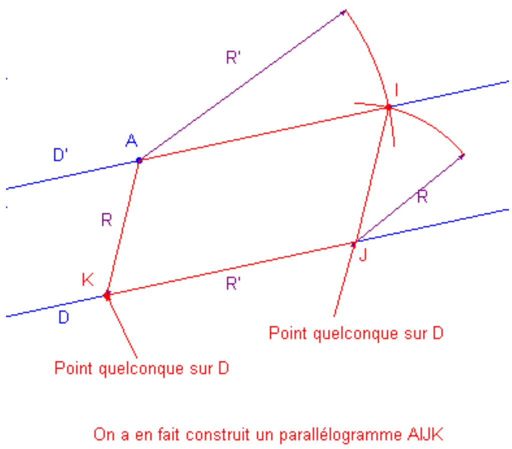
1°) elles sont coplanaires

et

2°) soit elles n'ont pas de point commun (elles sont alors strictement parallèles) soit elles sont confondues

• On note D // D'

• Construction à la règle et au compas d'une droite parallèle à une droite donnée et passant par un point donné :



♦ Durée (calcul d'une durée)

- Exemple : durée écoulée entre 13h33mn et 17h78mn):

Première méthode :	Deuxième méthode :
16h 78 mn	78 mn
~~17h~~ ~~18~~ mn	17h ~~18~~ mn
-	-
13h 33 mn	~~13h~~ 33 mn
	14h
3h 45 mn	3h 45 mn

♦ Écriture décimale

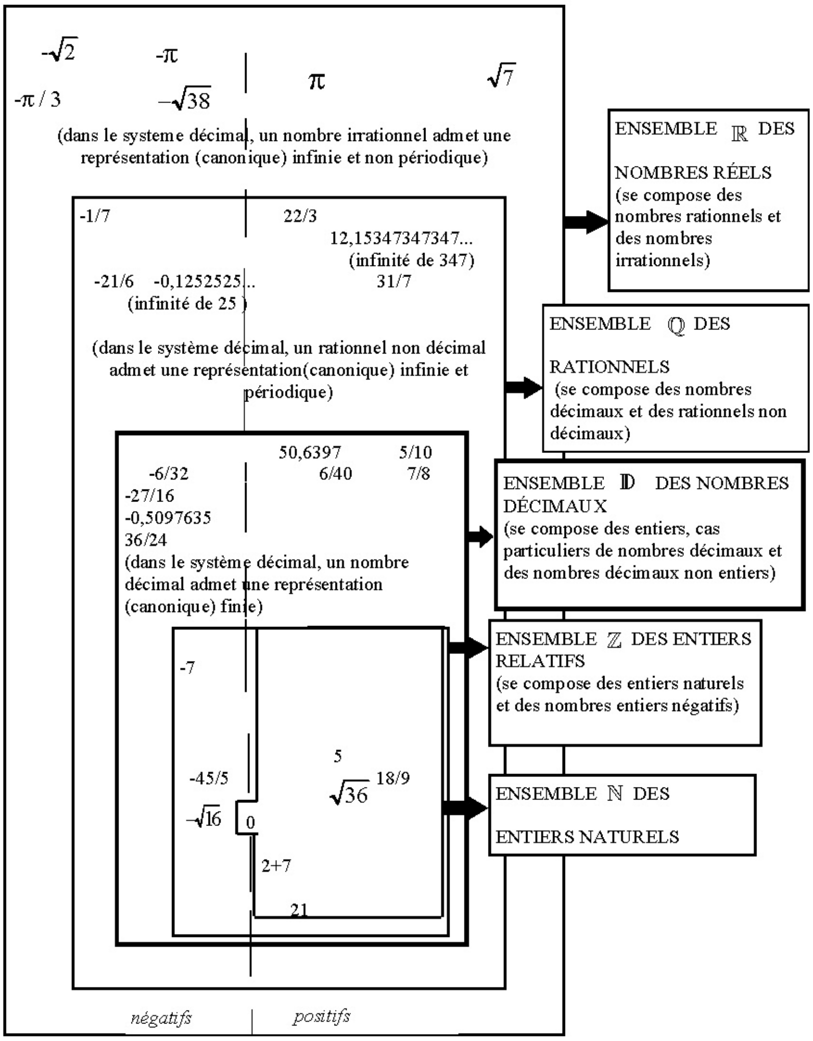
- On appelle écriture décimale d'un nombre une écriture de ce nombre dans notre système de numération de base dix.
- Exemples : 5 2,5624 $3{,}56\overline{128}$ (ce qui signifie 3,56128128128 ...)
  avec une infinité de 128

♦ Écriture scientifique

- On appelle écriture scientifique d'un nombre l'écriture $a \times 10^p$ avec $1 \le a < 10$ et p entier relatif.
- Exemple : $123 = 1{,}23 \times 10^2$ $0{,}00569 = 5{,}69 \times 10^{-3}$

♦ Ensembles de nombres

LES DIFFERENTS ENSEMBLES DE NOMBRES



♦ Encadrement

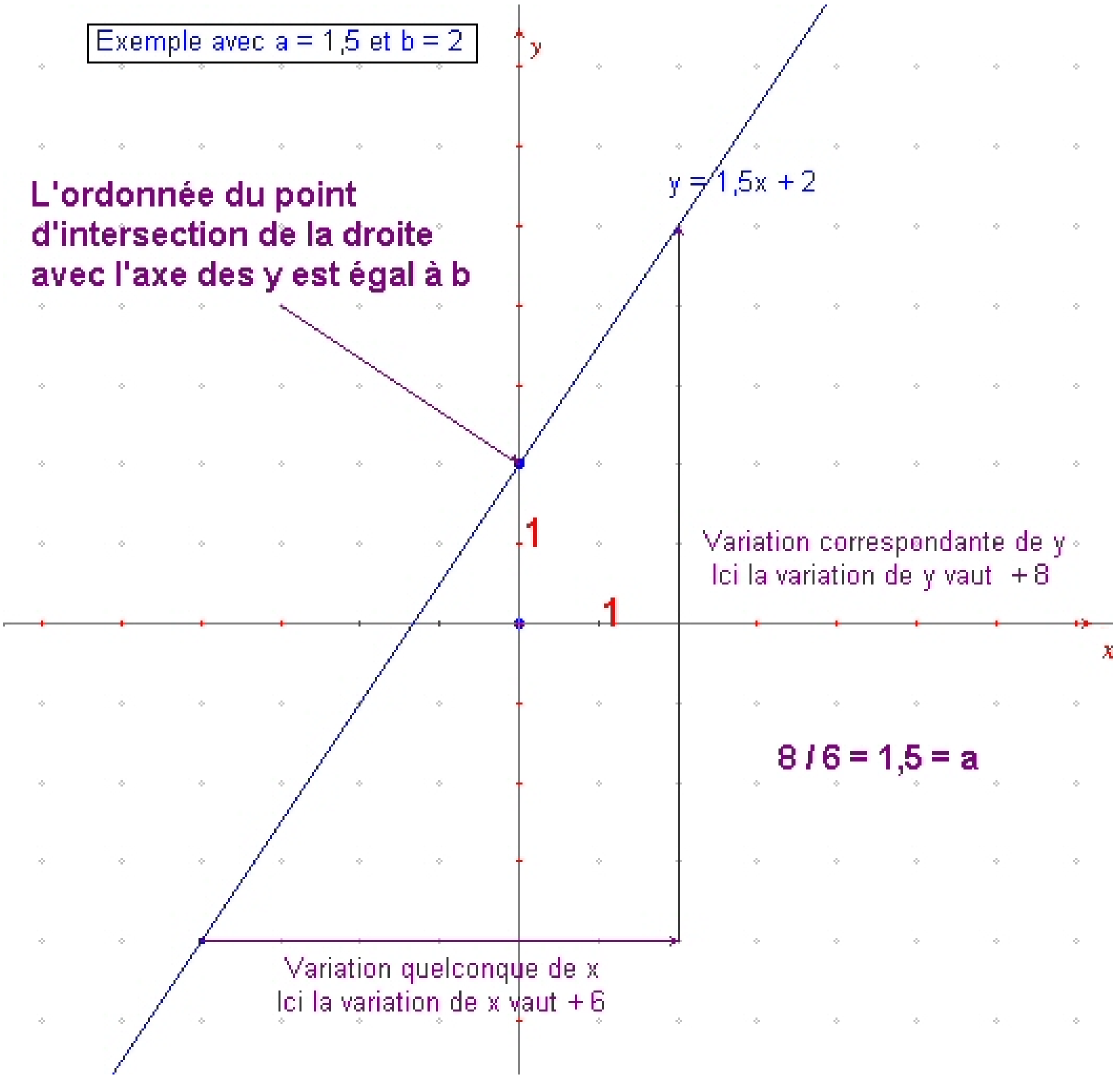
- Encadrer un nombre x c'est trouver un nombre y et un nombre z tels que y < x < z.

♦ Équation de droite

- Une droite parallèle à l'axe des y a une équation du type x = c (c étant une constante)
- Une droite non parallèle à l'axe des y a une équation du type y = ax+b (a et b étant des constantes non toutes deux nulles)

Remarque : si b= 0, la droite admet une équation du type y = ax et passe par l'origine du repère
si a = 0, la droite a une équation du type y = b et est parallèle à l'axe des x

- Pour comprendre "le rôle" de a et "le rôle" de b :



- D d'équation y = ax + b et D' d'équation y = a'x + b' sont parallèles si et seulement si a = a'

- **Dans un repère orthonormé**, D d'équation y = ax + b et D' d'équation y = a'x + b' sont perpendiculaires si et seulement si a × a' = -1.

♦ Équation du premier degré

- On appelle équation du premier degré une équation qui, après simplifications éventuelles, peut être écrite : $ax = b$ **avec** $\mathbf{a \neq 0}$. Cette équation admet une solution unique égale à $\frac{b}{a}$.

- Exemple :

$$\frac{x-3}{4} - \frac{2x-5}{6} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3x-9}{12} - \frac{4x-10}{12} = -\frac{4}{12} \Leftrightarrow 3x - 9 - (4x - 10) = -4 \Leftrightarrow 3x - 9 - 4x + 10 = -4$$

$$\Leftrightarrow 3x - 4x = 9 - 10 - 4 \Leftrightarrow -x = -5 \Leftrightarrow x = 5$$

♦ "Équation-produit"

- On appelle "équation-produit" une équation du type (ax+b)(cx+d).... = 0
- (ax+b)(cx+d).... = 0 est équivalente à $\begin{cases} ax+b=0 \\ \text{ou} \\ cx+d=0 \\ \text{ou} \\ \ldots \end{cases}$
- Exemple : (2x - 4)(-3x - 6) = 0 $\Leftrightarrow$ 2x - 4 = 0 ou -3x - 6 = 0 $\Leftrightarrow$ 2x = 4 ou -3x = 6 $\Leftrightarrow$ x = 2 ou x = -2

♦ Étendue

- En statistique, l'étendue d'une série de données est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur de la série

♦ Exposant (règles de calcul concernant les exposants)

RÈGLES DE CALCUL CONCERNANT LES PUISSANCES ENTIÈRES

1°) Définitions :

a) Si n est un entier positif, $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n fois}}$

Exemples : $2^3 = 2\times2\times2 = 8 \qquad 10^5 = 10\times10\times10\times10\text{x}10 = 100\ 000$

$(-2)^4 = (-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2) = 16 \qquad (-4)^3 = (-4)\times(-4)\times(-4) = -64$

b) $a^0 = 1$

c) Si n est un entier négatif, $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}} = \dfrac{1}{\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{\text{- n fois}}}$ (avec $a \neq 0$)

Exemples : $2^{-3} = \dfrac{1}{2\times2\times2} = \dfrac{1}{8} \qquad 10^{-5} = \dfrac{1}{10\times10\times10\times10\text{x}10} = 0{,}00001$

$(-2)^{-4} = \dfrac{1}{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)} = \dfrac{1}{16} \qquad (-4)^{-3} = \dfrac{1}{(-4)\times(-4)\times(-4)} = -\dfrac{1}{64}$

2°) Règles de calcul :

a) $\boxed{a^n \times a^m = a^{n+m}}$ (les exposants sont différents mais c'est le même nombre qui est élevé à différentes puissances)

Exemples : $5^3\times5^4 = 5^7 \qquad 6^8 = 6^3\times6^5 \qquad 10^4\times10^{-6} = 10^{-2} = \dfrac{1}{10^2}$

b) $\boxed{\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$ (les exposants sont différents mais c'est le même nombre qui est élevé à différentes puissances)

"exposant du haut moins exposant du bas"

Exemples : $\dfrac{5^6}{5^4} = 5^{6-4} = 5^2 \qquad \dfrac{6^3}{6^{-2}} = 6^{3-(-2)} = 6^5 \qquad \dfrac{10^{-5}}{10^{-7}} = 10^{-5-(-7)} = 10^2$

c) $\boxed{a^n \times b^n = (a\times b)^n}$ (les nombres élevés à différentes puissances sont différents mais les exposants sont les mêmes)

Exemples : $2^3\times5^3 = 10^3 \qquad 6^8 = (2\times3)^8 = 2^8\times3^8 \qquad (-2)^{-3}\times(-4)^{-3} = 8^{-3} = \dfrac{1}{8^3}$

d) $\boxed{(a^n)^m = a^{n\times m}}$

Exemples : $(2^3)^4 = 2^{12} \qquad \left((-3)^2\right)^6 = (-3)^{12} \qquad 5^6 = 5^{2\times3} = (5^2)^3 \qquad 5^6 = 5^{2\times3} = (5^3)^2$

$(-3)^{15} = (-3)^{3\times5} = \left((-3)^3\right)^5$

e) Attention !

Il n'y a pas de formule générale pour $a^n \times b^m$ (comme par exemple $2^3 \times 3^5$)

(les exposants sont différents et les nombres élevés à différentes puissances sont différents)

Il n'y a pas de formule générale pour $\dfrac{a^n}{b^m}$ (comme par exemple $\dfrac{6^4}{5^2}$)

(les exposants sont différents et les nombres élevés à différentes puissances sont différents)

$(a+b)^n$ n'est, en général, pas égal à $a^n + b^n$

$(a-b)^n$ n'est, en général, pas égal à $a^n - b^n$

3°) Exposants entiers négatifs

a) Pour que la règle $\frac{10^a}{10^b} = 10^{a-b}$ soit encore valable pour a<b, on pose,

par définition, $10^{-5} = \frac{1}{10^5} = 0{,}000\,01$ (on peut retenir que le 1 est à la cinquième place à droite après la virgule ou bien qu'il y a cinq zéros en comptant le zéro avant la virgule)

Ce n'est pas valable que pour 10 : de façon générale $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$

Exemple : $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

b) Pour écrire les nombres : $0{,}002\,36 = 2{,}36 \times 0{,}001 = 2{,}36 \times 10^{-3}$

c) On démontre que les trois règles vues au 1 restent valables quand a ou b (ou les deux) sont négatifs et que donc elles sont valables avec a et b entiers quelconques

- Exemple pour la première règle :

$10^5 \times 10^{-3} = 10^{5+(-3)} = 10^2$

(ce qui signifie : $100000 \times \frac{1}{1000} = 10^2$)

- Exemples pour la deuxième règle :

$\frac{10^{-5}}{10^3} = 10^{-5-3} = 10^{-8}$ ce qui signifie : $\frac{0{,}000\,01}{1000} = 0{,}000\,000\,01$

$\frac{10^6}{10^{-3}} = 10^{6-(-3)} = 10^9$ ce qui signifie : $\frac{1\,000\,000}{0{,}001} = 1\,000\,000\,000$

- Exemples pour la troisième règle :

$\left(10^3\right)^{-2} = 10^{3\times(-2)} = 10^{-6}$ ce qui signifie $\frac{1}{1000 \times 1000} = 0{,}000\,001$

$\left(10^{-2}\right)^{-3} = 10^{(-2)\times(-3)} = 10^6$ ce qui signifie $\frac{1}{0{,}01 \times 0{,}01 \times 0{,}01} = 1\,000\,000$

- Exemple plus complexe :

$$\frac{2{,}5 \times 10^{-3} \times (5 \times 10^4)^2}{25 \times 10^{-4}} = \frac{25 \times 10^{-1} \times 10^{-3} \times 5^2 \times 10^8}{25 \times 10^{-4}}$$

$$= \frac{25 \times 25 \times 10^{-1-3+8}}{25 \times 10^{-4}} = \frac{25 \times 10^4}{10^{-4}} = 25 \times 10^{4-(-4)} = 25 \times 10^8$$

♦ Factorisation d'une expression

- Factoriser une expression consiste à remplacer une somme de termes par un produit de facteurs.
- Exemple : $x^2 - 9 + x - 3 = (x-3)(x+3) + (x-3) = (x-3)(x+3+1) = (x-3)(x+4)$

♦ Figures homothétiques

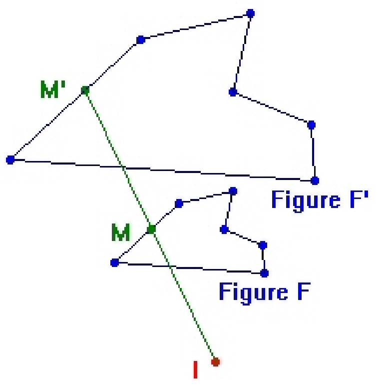
- Deux figures sont homothétiques quand l'une est l'image de l'autre dans une homothétie.

- Définition de la notion d'homothétie :

Dans l'homothétie de centre I et de rapport k

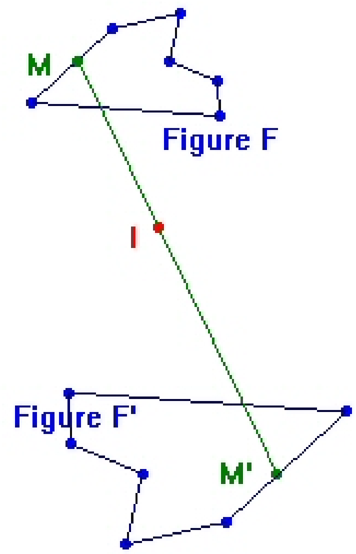
Si k est positif, M est transformé en M' tel que :

- I, M et M' sont alignés
- M' est sur la demi-droite [IM) d'origine I
- IM' = k × IM



Exemple avec k = 2

Si k est négatif, M est transformé en M' tel que :
- I, M et M' sont alignés
- M' n'est pas sur la demi-droite [IM) d'origine I
- IM' = | k | × IM (c'est-à-dire que si k = - 3 alors IM' = 3 × IM)



Exemple avec k = -1,5

- Compléments :

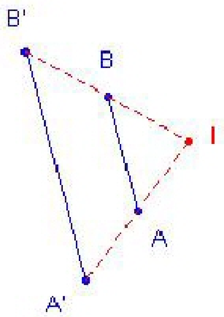
1°) Propriétés

a) Première propriété :

Soit deux points A et B et soit A' et B' les images respectives de ces points A et B dans une homothétie de centre I et de rapport k.

Propriété : (A'B') // (AB) et A'B' = |k| × AB ou |k| désigne la valeur absolue de k.

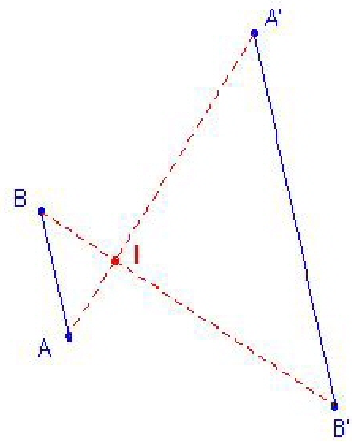
Premier exemple avec k = 2



A'B' = 2AB

Deuxième exemple avec k = -3

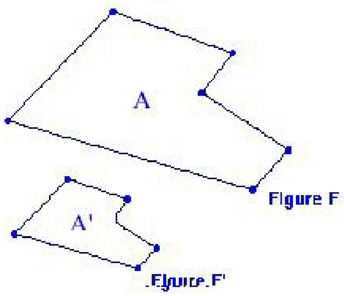
$A'B' = |-3| \times AB = 3AB$



b) Deuxième propriété :

Si une figure F' est l'image d'une figure F dans une homothétie de centre I et de rapport k et si F a une aire égale à A alors F' a une aire égale à k² × A.

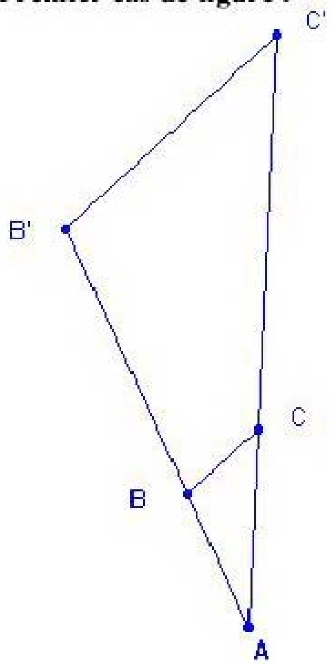
Exemple avec $k = \frac{1}{2}$:



$$A' = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times A = \frac{1}{4}A$$

2°) Cas particulier : triangles homothétiques

Premier cas de figure :



Hypothèse : (B'C') // (BC)

D'après le théorème de Thalès :

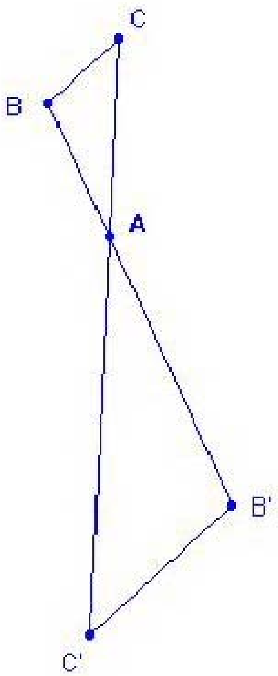
$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$

Appelons r le rapport précédent.
On a AB'=r×AB et AC'=r×AC

Le triangle AB'C' est l'image du triangle ABC dans l'homothétie de centre A et de rapport k égal à r.

(pour la figure ci-contre k = 3)

Deuxième cas de figure :



Hypothèse : (B'C') // (BC)

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$$

Appelons r le rapport précédent.
On a AB' = r×AB et AC '= r×AC

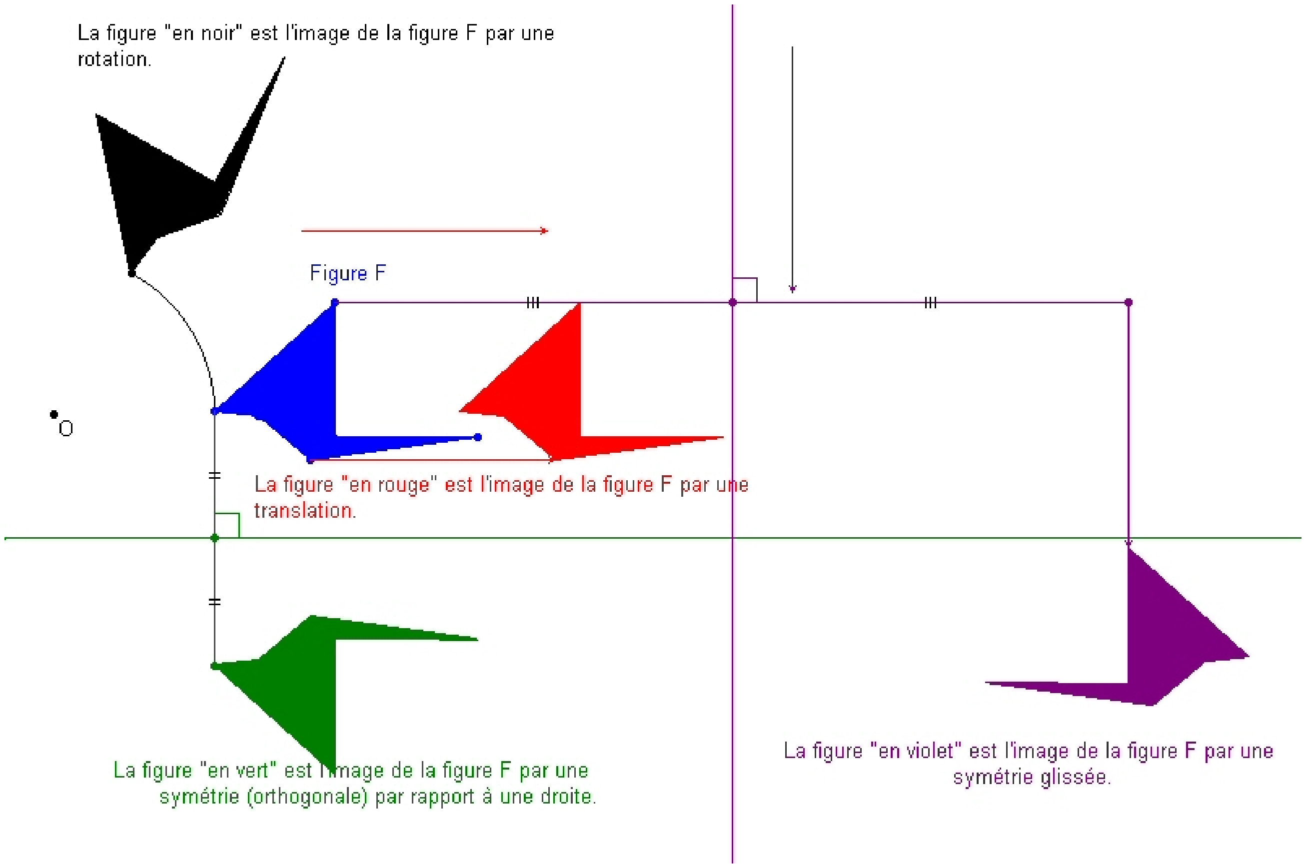
Le triangle AB'C' est l'image du triangle ABC dans l'homothétie de centre A et de rapport k avec k = -r.

(pour la figure ci-contre k = - 2)

♦ Figures isométriques

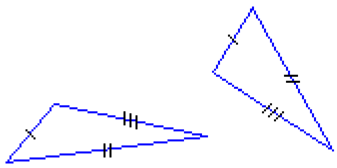
- Deux figures sont isométriques si elles sont superposables. Cela signifie que l'une est l'image de l'autre par une isométrie.

- Il y a quatre types d'isométries :
  - la translation
  - la rotation
  - la symétrie axiale (orthogonale)
  - la symétrie glissée

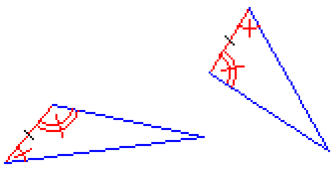


- Cas particuliers : triangles isométriques

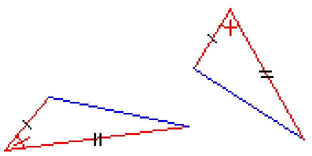
Propriété 1 : deux triangles ayant respectivement leurs trois côtés de même longueur sont isométriques.



Propriété 2 : deux triangles ayant un côté de même longueur adjacent à deux angles respectivement égaux sont isométriques.

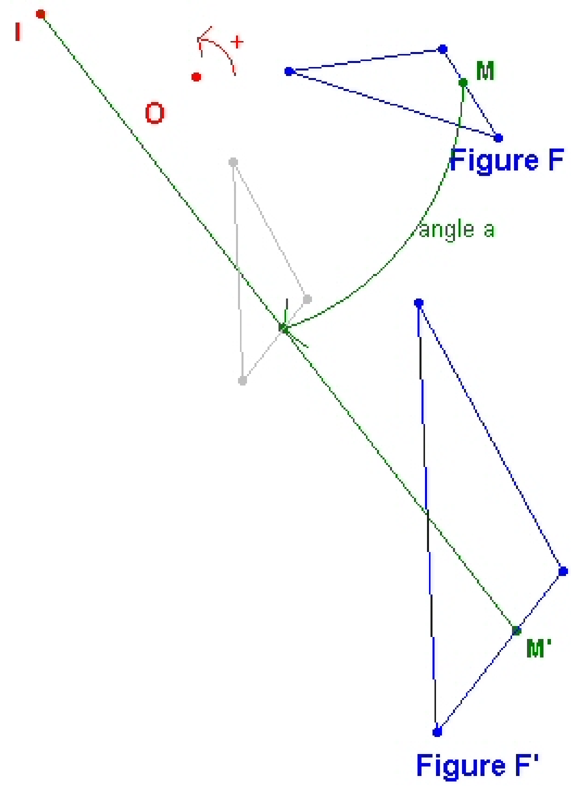


Propriété 3 : deux triangles ayant un angle égal compris entre deux côtés de même longueur sont isométriques.



♦ Figures semblables

- Deux figures sont semblables quand l'une est l'image de l'autre dans une similitude.
- Définition de la notion de similitude : une similitude est une transformation obtenue en faisant une isométrie suivie d'une homothétie de rapport k.



Dans l'exemple choisi, l'isométrie est la rotation de centre O et d'angle – 70° et l'homothétie est l'homothétie de centre I et de rapport 2.

- Cas particulier : triangles semblables

1°) Si le triangle F' est semblable au triangle F avec un rapport d'homothétie qui vaut k, les longueurs des côtés du triangle F ' sont proportionnelles aux longueurs des côtés du triangle F (le rapport de proportionnalité vaut | k |, c'est-à-dire valeur absolue de k).
Remarque : réciproquement si les longueurs des côtés d'un triangle F' sont proportionnelles aux longueurs des côtés d'un triangle F alors F' est semblable au triangle F.

2°) Si le triangle F' est semblable au triangle F les angles du triangle F' sont égaux aux angles du triangle F.
Remarque : réciproquement si les angles d'un triangle F' sont égaux aux angles d'un triangle F alors F' est semblable au triangle F.

3°) Des triangles homothétiques sont un cas particulier de triangles semblables

♦ File numérique

- On appelle file numérique la suite des écritures chiffrées représentant les entiers naturels :
0 1 2 3 4 5 6 etc.

♦ Fonction

- Étant données deux quantités x et y, on appelle fonction qui à x associe y tout procédé qui permet, si x est connu et si y existe, de déterminer y de façon unique. On note une telle fonction $x \mapsto y$ et si on appelle f cette fonction on pourra écrire y = f(x).

- Fonction linéaire : Si y=ax alors la fonction qui à x associe y est appelée fonction linéaire et sa représentation graphique est une droite qui passe par l'origine du repère. C'est un type de fonction particulièrement important car ceci correspond au cas où la quantité y est proportionnelle à la quantité x, a étant le coefficient de proportionnalité.

- Fonction affine : Si y=ax+b alors la fonction qui à x associe y est appelée fonction affine et sa représentation graphique est une droite.
Remarques :
- si b=0 on retrouve y=ax donc les fonctions linéaires sont des cas particuliers de fonctions affines
- y est la somme d'une quantité b fixe et d'une quantité ax proportionnelle à x.
- sauf dans le cas où b=0, y n'est pas proportionnelle à x mais les variations de y sont proportionnelles aux variations de x.

- Pour comprendre "le rôle" de a et "le rôle" de b voir la rubrique *Équation de droite* de cet aide-mémoire

♦ Fraction (ou écriture fractionnaire)

- Une fraction est une écriture du type $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers.

- Une fraction représente un nombre rationnel (voir la rubrique *Nombre rationnel* de cet aide-mémoire)
- Formulaire :

$$\frac{ca}{cb} = \frac{a}{b} \qquad c \times \frac{a}{b} = \frac{ca}{b} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \qquad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \qquad \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

- Pour calculer $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ ou $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$, on remplace $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ par des fractions équivalentes ayant le même dénominateur (le "meilleur" dénominateur possible est le PPCM de b et d mais on peut aussi prendre pour dénominateur un multiple du PPCM de b et d et même le produit bd et simplifier ensuite le résultat).

Exemple : $\frac{7}{12}+\frac{4}{45}=\frac{7\times15}{12\times15}+\frac{4\times4}{45\times4}=\frac{105}{180}+\frac{16}{180}=\frac{121}{180}$

♦ Fraction décimale

- On appelle fraction décimale une fraction du type $\frac{a}{10^p}$ (avec p entier)

- Une fraction décimale représente un nombre décimal (voir la rubrique *Nombre décimal* de cet aide mémoire)
- Exemples : $\frac{123}{1\,000}$ et $\frac{12\,300}{100\,000}$ sont des fractions décimales représentant le même nombre décimal.

♦ Fraction irréductible

- On appelle fraction irréductible une fraction qui ne peut pas être simplifiée autrement dit une fraction $\frac{a}{b}$ telle que a et b n'admettent pas d'autre diviseur commun que 1

♦ Grandeurs (voir aussi la rubrique "*Comparaisons directes, comparaisons indirectes et mesurages*" de cet aide-mémoire)

- Pour les lignes, on introduit la notion de **longueur** :

Au cycle 1, on compare, on classe et on range des objets selon leur taille.
Au cycle 2, on introduit les mesures de longueur et on utilise le centimètre et le mètre (approche au CP et structuration au CE1).
Au cycle 3 (CM1), on mesure des longueurs en utilisant les unités légales du système métrique (mètre, ses multiples et ses sous-multiples usités).

- Pour les surfaces, on introduit la notion d'**aire** :

Au cycle 3, on introduit la notion d'aire en comparant des surfaces (CM1) puis on mesure des aires en utilisant le cm², le dm², le m² et le km² (CM2).
On voit la formule donnant l'aire d'un rectangle (CM2).

- Pour les solides creux, on introduit la notion de **contenance (ou capacité)** qui est un cas particulier de la notion de volume :

Au cycle 1, on compare des objets selon leur contenance.
Au cycle 2 (CE1), on compare des objets creux et on introduit la notion de litre.
Au cycle 3 (CM1), on mesure des contenances en utilisant les unités légales du système métrique (litre, ses multiples et sous-multiples usités).

- Pour les objets quelconques, on introduit la notion de **masse** :

Au cycle 1, on compare des objets selon leur masse.
Au cycle 2, on compare des objets et on mesure des masses en utilisant le g et le kg.
Au cycle 3 (CM1), on mesure des masses en utilisant les unités légales du système métrique (gramme, ses multiples et sous-multiples usités).

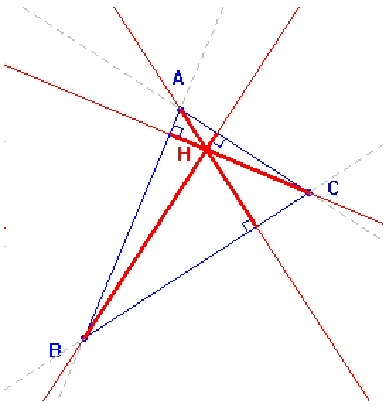
- Pour des événements qui se prolongent dans le temps, on introduit la notion de **durée** :

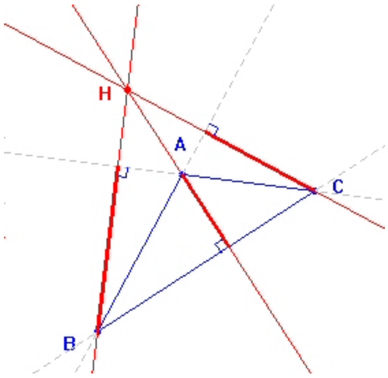
Au cycle 2 (CE1), on fait une première approche des notions de jour, heure, minute et seconde.
Au cycle 3, on poursuit le travail entamé au CE1 et on apprend à calculer une durée à partir de la donnée de l'instant initial et de l'instant final (approche au CE2 et CM1 et structuration au CM2).

- Remarque : on voit aussi la notion de prix.

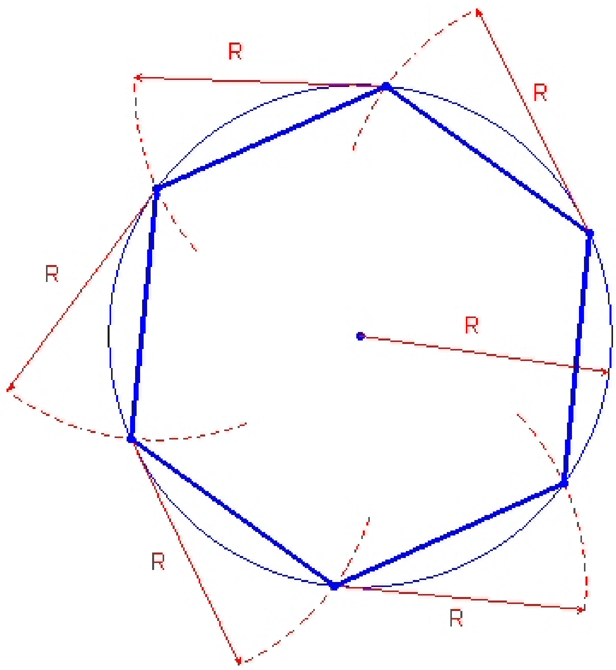
♦ Hauteurs d'un triangle

- L'expression "hauteur d'un triangle" peut désigner
  - une droite passant par un sommet du triangle et perpendiculaire à la droite portant le côté du triangle opposé à ce sommet
  - un segment ayant pour extrémité un sommet du triangle et pour autre extrémité le projeté orthogonal de ce sommet sur la droite portant le côté du triangle opposé à ce sommet
  - la longueur d'un segment du type précédent
- Les hauteurs d'un triangle se coupent en un point appelé orthocentre du triangle.





♦ Hexagone régulier (construction avec une règle et un compas)



♦ Homothétie Voir la rubrique *Figures homothétiques* de cet aide-mémoire

♦ Identités remarquables

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$

♦ Inéquation du premier degré à une inconnue

• On appelle inéquation du premier à une inconnue (notée x) une inéquation qui, après simplification, peut être mise sous la forme $ax < b$ ou $ax \le b$ ou $ax > b$ ou $ax \ge b$ avec $a \neq 0$.

Si a est positif, les solutions de ax < b sont les nombres inférieurs à $\frac{b}{a}$ mais si a est négatif, les solutions de ax < b sont les nombres supérieurs à $\frac{b}{a}$.

Si a est positif, les solutions de $ax \le b$ sont les nombres inférieurs ou égaux à $\frac{b}{a}$ mais si a est négatif, les solutions de $ax \le b$ sont les nombres supérieurs ou égaux à $\frac{b}{a}$.

Si a est positif, les solutions de ax > b sont les nombres supérieurs à $\frac{b}{a}$ mais si a est négatif, les solutions de ax > b sont les nombres inférieurs à $\frac{b}{a}$.

Si a est positif, les solutions de $ax \ge b$ sont les nombres supérieurs ou égaux à $\frac{b}{a}$ mais si a est négatif, les solutions de $ax \ge b$ sont les nombres inférieurs ou égaux à $\frac{b}{a}$.

• Exemple : $-2x - 4 \le 5x + 10 \Leftrightarrow -2x - 5x \le 10 + 4 \Leftrightarrow -7x \le 14 \Leftrightarrow x \ge \frac{14}{-7} \Leftrightarrow x \ge -2$

♦ Inéquation du premier degré à deux inconnues

• On appelle inéquation du premier degré à deux inconnues une inéquation qui, après simplifications éventuelles, peut être mise sous la forme
$y < ax + b$ ou $y \le ax + b$ ou $y > ax + b$ ou $y \ge ax + b$ (a étant un nombre non nul)

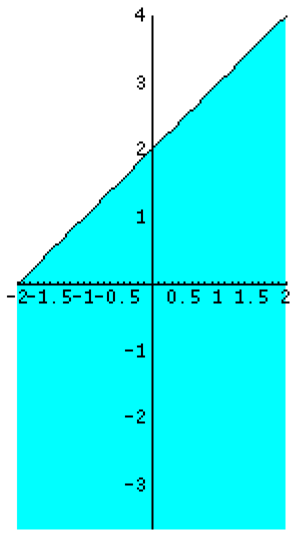
• L'ensemble des couples solutions peut être représenté par une région du plan : l'ensemble E des points M dont les coordonnées x et y vérifient l'inéquation

Pour y **<**ax + b, E est le demi-plan ouvert situé **en dessous** de la droite D d'équation y = ax+b (la droite D ne fait pas partie de l'ensemble E)

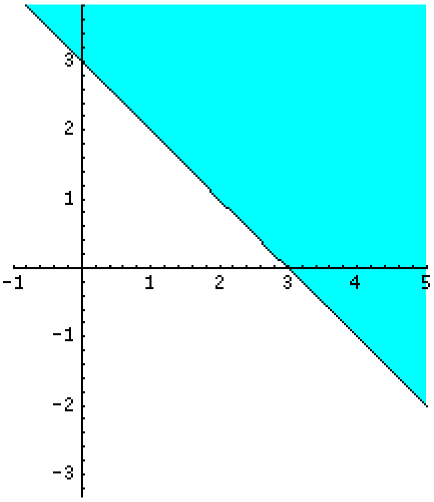
Pour $y \le ax + b$, E est le demi-plan fermé situé **en dessous** de la droite D d'équation y = ax+b (la droite D fait partie de l'ensemble E)

Pour y**>**ax + b, E est le demi-plan ouvert situé **au-dessus** de la droite D d'équation y = ax+b (la droite D ne fait pas partie de l'ensemble E)

Pour $y \ge ax + b$, E est le demi-plan fermé situé **au-dessus** de la droite D d'équation y = ax+b (la droite D fait partie de l'ensemble E)



y<x+2
(la partie coloriée correspond aux couples solutions



y>-x+3
(la partie coloriée correspond aux couples solutions

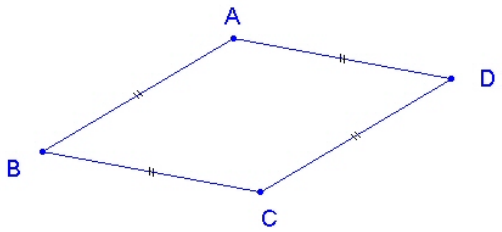
♦ Isométrie Voir la rubrique *Figures isométriques* de cet aide-mémoire

♦ Loi de composition interne

- Étant donné un ensemble E, on appelle loi de composition interne définie sur E tout procédé qui permet d'associer à un couple (a,b) d'éléments de E un unique élément c de E
- On peut se limiter à prendre pour E un ensemble de nombres.

La loi de composition interne définie sur E peut être une opération usuelle (addition, multiplication ou soustraction) ou une loi plus "folklorique" comme par exemple la loi L définie par :
a L b = 2a + b (on aura alors, par exemple, 3 L 4 = 10).

♦ Losange

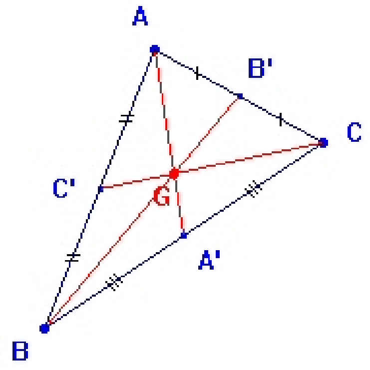


- Un quadrilatère est un losange si et seulement si il admet quatre côtés de même longueur.
- Un quadrilatère est un losange si et seulement si c'est un parallélogramme **et** ses diagonales sont perpendiculaires
- Si on appelle c la longueur d'un côté, d la longueur d'une diagonale, D la longueur de l'autre diagonale, p le périmètre et A l'aire :

$$p = 4\times c \text{ et } A = \frac{d \times D}{2}$$

♦ Médiane d'un triangle

- L'expression "médiane d'un triangle" peut désigner
  - une droite passant par un sommet du triangle et par le milieu du côté du triangle opposé à ce sommet
  - un segment ayant pour extrémité un sommet du triangle et pour autre extrémité le milieu du côté du triangle opposé à ce sommet
- Les médianes d'un triangle se coupent en un point appelé centre de gravité du triangle



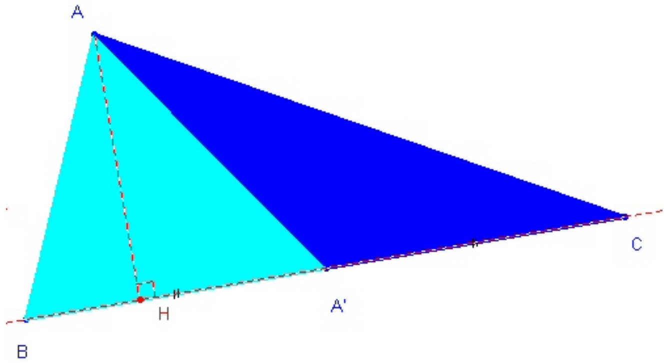
Propriétés :

$$AG = \frac{2}{3}AA'$$

$$BG = \frac{2}{3}BB'$$

$$CG = \frac{2}{3}CC'$$

- Propriété : une médiane d'un triangle partage ce triangle en deux triangles de même aire

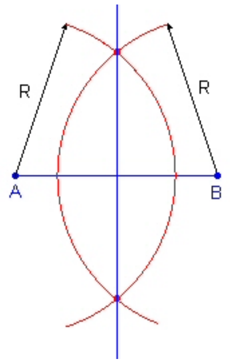


Aire (ABA') = $\frac{BA' \times AH}{2}$ et Aire (ACA') = $\frac{CA' \times AH}{2}$

Or BA' = A'C donc Aire (ABA') = Aire (ACA')

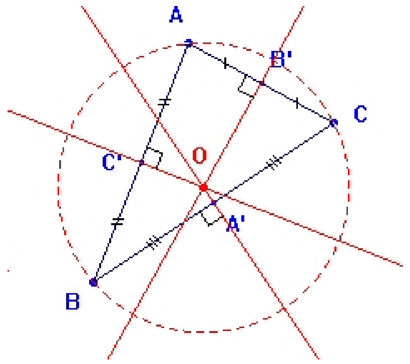
♦ Médiatrice d'un segment

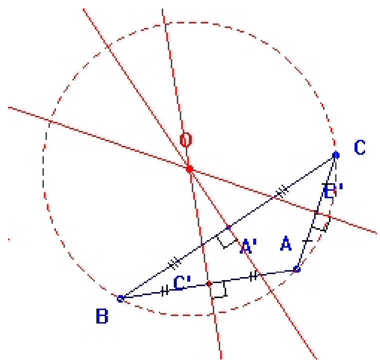
- La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.
- Propriété : la médiatrice d'un segment est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.
- Construction de la médiatrice d'un segment "à la règle et au compas" :



◆ **Médiatrices d'un triangle**

- Les médiatrices d'un triangle sont les médiatrices des côtés de ce triangle.
- Les médiatrices d'un triangle se coupent en un point qui est le centre du cercle circonscrit à ce triangle :

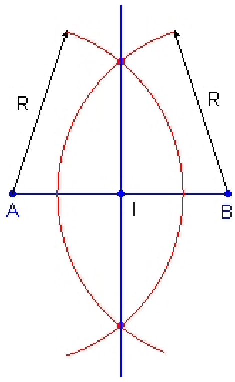




◆ **Mesure : voir la rubrique "*Comparaisons directes, comparaisons indirectes et mesurages*" et la rubrique "*Grandeurs et mesures*" de cet aide-mémoire**

◆ **Milieu d'un segment**

- Le milieu d'un segment est le point de ce segment qui est équidistant de ses extrémités.
- Construction du milieu d'un segment "à la règle et au compas" :



◆ **Multiple** *(voir aussi la rubrique "Diviseur" et la rubrique "PPCM" de cet aide-mémoire)*

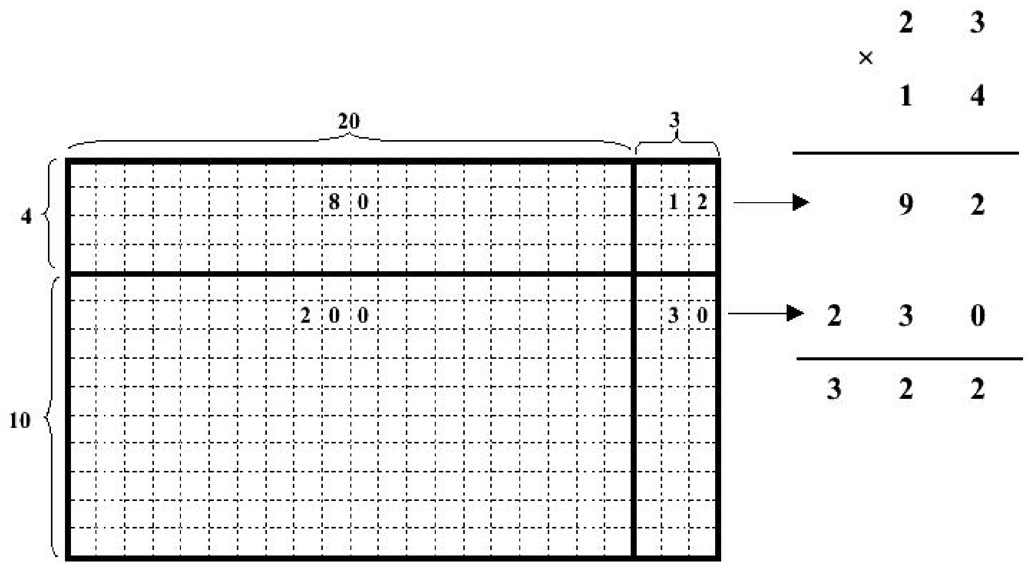
- Un entier naturel n est un multiple d'un entier naturel p si on peut trouver un entier naturel k tel que n = k × p, ce qui revient à dire que n figure dans la table de multiplication de p (ou son prolongement)

- Les multiples de p sont les nombres 0 × p, 1× p, 2 × p, 3× p etc.
- Exemples : 42 est un multiple de 7 car 42 = 6 × 7
  2 091 est un multiple de 17 car 2 091 = 123 × 17
- Dire que n est un multiple de p c'est dire que p est un diviseur de n :
  42 est un multiple de 7   7 est un diviseur de 42
- Un entier naturel n est un multiple d'un entier naturel p si le reste de la division euclidienne de n par p est égal à 0.
- Attention : un nombre qui est à la fois multiple de p et multiple de q n'est pas nécessairement un multiple de p × q. C'est vrai uniquement si pet q sont "premiers entre eux" (ce qui ne signifie pas nécessairement que p et q sont des nombres premiers mais ce qui signifie que p et q n'ont pas d'autre diviseur commun que 1 autrement dit que leur PGCD vaut 1).
  Exemples :
  Si un nombre est en même temps un multiple de 8 et un multiple de 9 alors ce nombre est un multiple de 8 × 9 c'est-à-dire de 72 car 8 et 9 sont "premiers entre eux" (8 et 9 n'ont pas d'autre diviseur commun que 1).

Mais ce n’est pas parce qu’un nombre est en même temps un multiple de 4 et un multiple de 18 qu’il est nécessairement un multiple de 72 car 4 et 18 ne sont pas "premiers entre eux" (ils sont tous deux divisibles par 2). Et effectivement 36 est un multiple de 4 et de 18 sans être un multiple de 72.

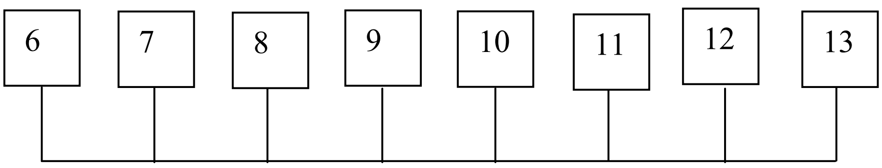
♦ Multiple commun à deux nombres entiers naturels: voir la rubrique *PPCM* de cet aide-mémoire

♦ Multiplication (aide-mémoire concernant la technique opératoire) :



♦ Nombre d'entiers naturels situés entre deux entiers naturels n et p (n et p compris)

- Soit deux entiers naturels n et p (avec p > n). Entre n et p (n et p compris), il y a p - n+1 entiers.
- Exemple : entre 6 et 13 (6 et 13 compris), il y a 13 - 6+ 1 entiers soit 8 entiers.



(entre 6 et 13 il y a 13 - 6 intervalles de longueur 1 soit 7 intervalles mais 13 - 6 + 1 entiers soit 8 entiers)

- Autre exemple : entre 125 et 2012 (125 et 2012 compris) il y a 2012 – 125 +1 entiers soit 1888 entiers)

♦ Nombre décimal * (voir ajout à la fin de cet aide-mémoire)

QU'EST-CE QU'UN NOMBRE DECIMAL ?
(il s'agit de connaissances pour l'enseignant)

On démontre que les définitions suivantes sont équivalentes :

1°) Première définition possible :

Un décimal est un nombre qui PEUT être représenté par une écriture décimale finie.

(remarque : tout nombre décimal admet une deuxième écriture décimale composée d'une infinité de 9 à partir d'un certain rang ; exemple : 123,36 = 123,35999…)
(infinité de 9)

2°) Deuxième définition possible :

Un décimal est un nombre qui PEUT être représenté par une écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ où a est un entier et où b est égal à une puissance de 10.

Exemple : $\frac{728}{250}$ est un décimal car $\frac{728}{250} = \frac{2\,912}{1\,000} = 2,912$

3°) Troisième définition possible (souvent la plus facile à utiliser dans les exercices du premier volet surtout quand il s'agit de démontrer qu'un nombre n'est pas un décimal)

Un décimal est un nombre dont l'écriture fractionnaire <u>IRREDUCTIBLE</u> $\frac{c}{d}$ est telle que $d = 2^p \times 5^q$ (avec p et q entiers positifs ou nuls) [autrement dit : telle que d soit un produit de puissances de 2 ou de 5]

Exemples :

$\frac{19\,110}{455000} = \frac{21}{500}$ (fraction **irréductible**) et $500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$ donc $\frac{19\,110}{455000}$ est un décimal.

$\frac{35672}{5\,824} = \frac{49}{8}$ (fraction **irréductible**) et $8 = 2 \times 2 \times 2$ donc $\frac{35672}{728}$ est un décimal.

$\frac{860}{3640} = \frac{43}{182}$ (fraction **irréductible**) et $182 = 2 \times 7 \times 13$ donc $\frac{860}{3640}$ n'est **pas** un décimal.

♦ Nombre irrationnel

- Un nombre irrationnel est un nombre qui ne peut pas être écrit $\frac{p}{q}$ (avec p et q entiers)
- L'écriture décimale (c'est-à-dire l'écriture en base dix) d'un irrationnel est une écriture infinie non périodique.
- Exemples : π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ sont des nombres irrationnels.
- **Si n est un entier** et si n n'est pas "un carré parfait" (ce qui signifie que n ne peut pas être écrit p² avec p entier), alors $\sqrt{n}$ est un irrationnel

♦ **Nombre premier** *(voir aussi la rubrique "Décomposition d'un nombre entier naturel en un produit de nombres premiers" de cet aide-mémoire)*

- Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs différents : 1 et lui-même
- Début de la liste des nombres premiers :
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 etc.

♦ **Nombre rationnel** *(voir la rubrique "Ensembles de nombres" de cet aide-mémoire)*

- Un nombre rationnel est un nombre qui peut être écrit $\frac{p}{q}$ (avec p et q entiers)
- Un nombre décimal est un cas particulier de nombre rationnel.
- L'écriture décimale (c'est-à-dire l'écriture en base dix) d'un rationnel est soit une écriture finie (le nombre est alors un nombre décimal) soit une écriture infinie périodique du type $12{,}35\overline{612}$, ce qui signifie 12 ,35612612612612612 ... avec une infinité de 612 (le nombre est alors un nombre rationnel non décimal)

♦ **Notations géométriques :**

- [AB] désigne le segment (fermé) d'extrémités A et B (c'est un ensemble de points)
- (AB) désigne la droite passant par les points A et B (c'est un ensemble de points)
- [Ax) désigne une demi-droite (fermée) d'origine le point A (c'est un ensemble de points)
- AB désigne une longueur (ce n'est pas un ensemble de points). On peut également noter cette longueur d(A,B).

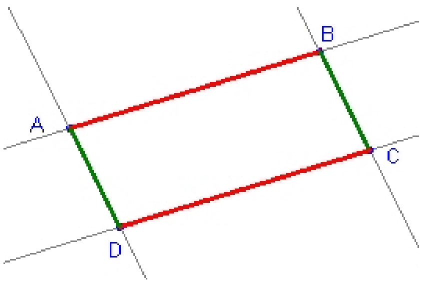
♦ **Objectifs : voir la rubrique "*Compétences et objectifs*" de cet aide-mémoire**

♦ **Objet géométrique**

- Un objet géométrique peut être un point ou un ensemble de points : ligne (objet géométrique "à une dimension"), surface (objet géométrique "à deux dimensions") ou solide (objets géométriques "à trois dimensions").

♦ **Orthocentre d'un triangle : voir la rubrique *"Hauteurs d'un triangle"* de cet aide-mémoire**

♦ **Parallélogramme**



- Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.
- Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement il a deux côtés opposés parallèles et de même longueur.
- Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses côtés opposés ont même longueur deux à deux.
- Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonale se coupent en leur milieu.

♦ Parallélépipède

- Un parallélépipède est un solide composé de six faces qui sont des parallélogrammes.

♦ Parallélépipède droit

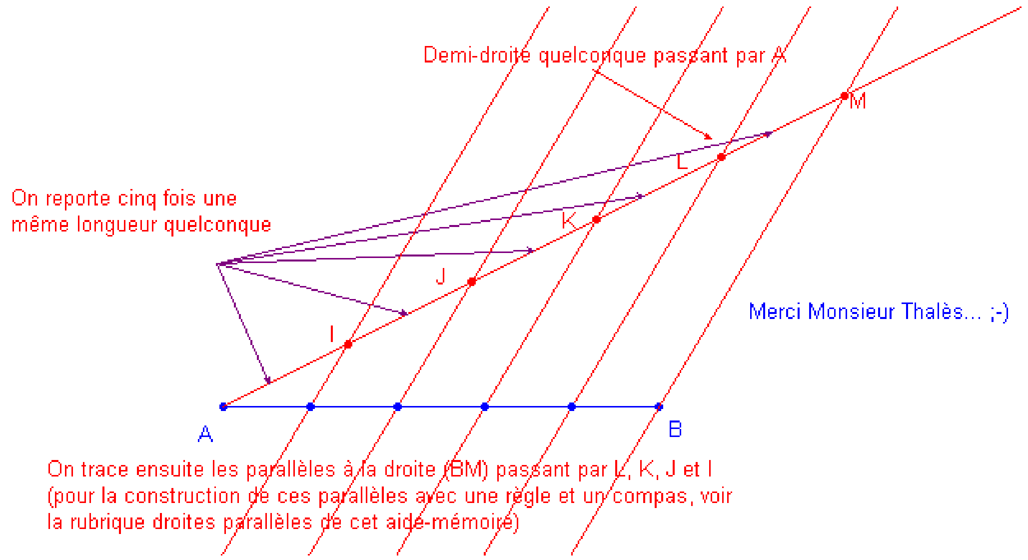
- Un parallélépipède droit est un parallélépipède dont deux faces opposées sont des parallélogrammes et dont les quatre autres faces sont des rectangles

♦ Parallélépipède rectangle (ou pavé droit)

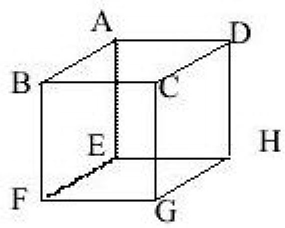
- Un parallélépipède rectangle est un parallélépipède dont les six faces sont des rectangles.

♦ Partage d'un segment en n segments de même longueur "à la règle et au compas" :

Exemple avec n =5 :

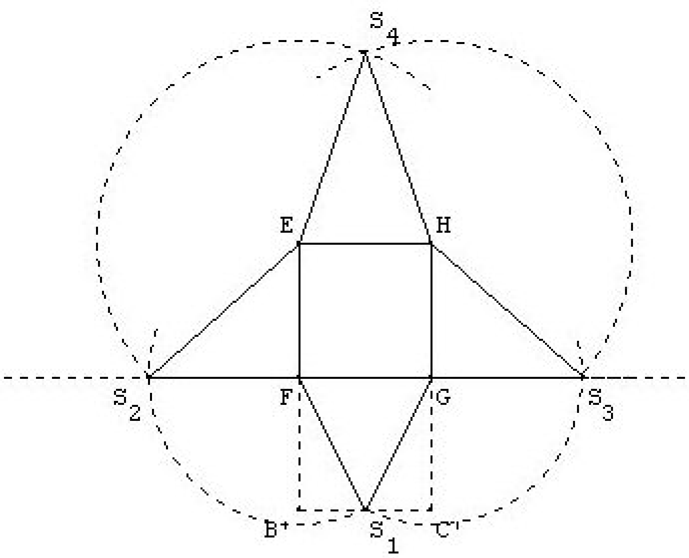


♦ Patron d'un polyèdre (exemple et recommandations)



ABCDEFGH est un **cube** dont les arêtes mesurent 4cm.

Soit S le milieu de [BC]. Construire, sans calculer les longueurs SE, SF, SG et SH, un patron de la pyramide à base carrée SEFGH



Première recommandation :

Essayer de bien comprendre quelle est la nature de chacune des faces du polyèdre dont on veut construire un patron. Dans le cas de l’exercice proposé, il y a un carré (face EFGH), deux triangles isocèles (faces FSG et ESH) et deux triangles rectangles EFS et HGS.
Ce qui est difficile c’est de bien voir que les angles EFS et HGS sont des angles droits alors qu’ils ne sont pas représentés par des angles droits sur le dessin en perspective.

Deuxième recommandation :

Si une arête de l’espace (exemple : le segment [FS] dans le cas de l’exercice proposé) est représentée par deux segments du patron (exemple : le segments [FS1] et [FS2] dans le cas de l’exercice proposé), ces deux segments on même longueur et on peut souvent utiliser le compas pour construire l’un des deux segments quand on connaît l’autre (exemple : dans le cas de l’exercice proposé on construit [FS2] à partir de [FS1] en utilisant un compas).

♦ Pavé droit : voir la rubrique *Parallélépipède rectangle* de cet aide-mémoire

♦ Périmètre (formulaire)

- Périmètre d'un polygone régulier (cas particuliers : triangle équilatéral, carré)
  p = n × c (où n est le nombre de côtés et c la longueur d'un côté)
- Périmètre d'un losange : p = 4c (où c est la longueur d'un côté)
- Périmètre d'un parallélogramme (cas particulier : rectangle) : p = 2×(L+l) (où L et l sont les longueurs des côtés)
- Périmètre d'un cercle : p = $2\pi r = \pi d$ (où r est le rayon et d le diamètre)

♦ PGCD et PPCM
(voir page suivante)

Multiples, diviseurs, PPCM (Plus Petit Commun Multiple) et PGCD (Plus Grand Commun Diviseur)

1°) Remarque préalable : ce qui est dit ici concerne les nombres entiers positifs.

2°) Multiples et diviseurs : a est un multiple de b si a peut être écrit kb avec k entier. On dit alors que b est un diviseur de a.

Exemples :

Multiples de 3 : 3, 6, 9, **12**, 15, 18, 21, **24**, 27, 30, 33, **36**, …
Multiples de 4 : 4, 8, **12**, 16, 20, **24**, 28, 32, **36**, 40, 44, …
Multiples communs à 3 et 4 : 12, 24, 36, …
PPCM de 3 et 4 : 12

Diviseurs de 21 : **1**, **3**, 7, 21 (pour la recherche des diviseurs voir 6°)
Diviseurs de 12 : **1**, 2, **3**, 4, 6, 12
Diviseurs communs à 12 et 21 : 1, 3
PGCD de 12 et 21 : 3

3°) Méthodes pour trouver le PGCD (exemple avec 84 et 270) :

a) Première méthode (utilisant les décompositions de 84 et 270 en produits de nombres premiers):
$84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = \mathbf{2^2} \times \mathbf{3} \times 7$
$270 = 2 \times 135 = 2 \times 3 \times 45 = 2 \times 3 \times 3 \times 15 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = \mathbf{2} \times \mathbf{3^3} \times 5$
PGCD (84 , 270) $= 2 \times 3 = 6$
(on ne prend que **les facteurs premiers qui apparaissent dans les deux** décompositions et on les affecte du plus **petit** exposant)

b) Deuxième méthode (algorithme d'Euclide) :

On effectue la division euclidienne de 270 par **84**.
On trouve un quotient qui vaut 3 et un reste qui vaut **18**.
PGCD(270 , 84) = PGCD(84 , 18)

On effectue la division euclidienne de 84 par **18**.
On trouve un quotient qui vaut 4 et un reste qui vaut **12**.
PGCD(84 , 18) = PGCD(18 , 12)

On effectue la division euclidienne de 18 par **12**.
On trouve un quotient qui vaut 1 et un reste qui vaut **6**.
PGCD(18 , 12) = PGCD(12 , 6)

On effectue la division euclidienne de 12 par **6**.
On trouve un quotient qui vaut 2 et un reste qui vaut 0.
PGCD(12,6) = 6

4) Méthodes pour trouver le PPCM (exemple avec 84 et 270) :

a) Première méthode (utilisant les décompositions de 84 et 270 en produits de nombres premiers):
$84 = 2 \times 42 = 2 \times 2 \times 21 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = \mathbf{2^2} \times \mathbf{3} \times \mathbf{7}$
$270 = 2 \times 135 = 2 \times 3 \times 45 = 2 \times 3 \times 3 \times 15 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 = \mathbf{2} \times \mathbf{3^3} \times \mathbf{5}$
PPCM(84 , 270) $= \mathbf{2^2} \times \mathbf{3^3} \times \mathbf{5} \times \mathbf{7} = 3780$
(On prend **tous les facteurs premiers** qui apparaissent et on les affecte du plus **grand** exposant)

b) Deuxième méthode (utilisable si on a déjà calculé le PGCD)
On utilise le fait que le produit du PPCM par le PGCD est égal au produit des deux nombres de départ.
Exemple :
PPCM(84 , 270) × PGCD(84 , 270) $= 84 \times 270$
PPCM(84 , 270) $\times 6 = 84 \times 270$
PPCM(84 , 270) $= \dfrac{84 \times 270}{6} = 3780$

5°) Compléments

On utilise le PPCM de certains nombres quand on s'occupe des multiples communs à ces nombres et qu'on est amené à chercher le plus petit de ces multiples.

Le PPCM de différents nombres est un multiple de chacun de ces nombres et est donc toujours supérieur ou égal à chacun des nombres.

On peut utiliser le PPCM quand on a plusieurs fractions et qu'on veut transformer ces fractions pour qu'elles aient toutes le même dénominateur.

On peut utiliser le PPCM quand on cherche les multiples communs à plusieurs nombres car une fois qu'on a trouvé le PPCM de ces nombres les multiples communs que l'on cherche sont les multiples du PPCM.

Exemples "classiques":
- si on veut paver un carré (dont les arêtes mesurent un nombre entier de cm) en juxtaposant des rectangles (tous disposés de la même manière) dont les côtés ont pour longueurs 24 cm et 60 cm et si on demande de chercher quelle est la valeur minimale possible pour la longueur du côté carré, on cherche le PPCM de 24 et 60 car la mesure de la longueur du côté du carré en cm doit être un multiple à la fois de 24 et 60).
- si on veut remplir un cube (dont les arêtes mesurent un nombre entier de cm) en juxtaposant des parallélépipèdes (tous disposés de la même manière) dont les côtés ont pour longueur 24cm, 40cm et 60 cm et si on demande de chercher quelle est la valeur minimale possible pour la longueur de l'arête du cube, on cherche le PPCM de 24, 40 et 60 car la mesure de la longueur de l'arête du cube en cm doit être un multiple à la fois de 24,40 et 60).

Si on cherche un nombre de taille minimale ayant telle ou telle propriété, on pense plutôt au PPCM.

On utilise le pgcd quand on s'occupe des diviseurs communs à ces nombres et qu'on est amené à chercher le plus grand de ces diviseurs.

Le PGCD de différents nombres est un diviseur de chacun des nombres et est donc toujours inférieur ou égal à chacun des nombres.

On peut utiliser le PGCD dans tous les problèmes où on cherche les diviseurs communs à plusieurs nombres car une fois qu'on a trouvé le PGCD, les diviseurs communs que l'on cherche sont les diviseurs du PGCD.

Exemples "classiques" :

- si on veut paver un rectangle dont les côtés ont pour longueurs 24 cm et 60 cm avec des carrés dont les côtés mesurent un nombre entier de cm et si on demande de chercher quelle est la valeur maximale possible pour la longueur du côté du carré, on cherche le PGCD de 24 et 60 car la mesure de la longueur du côté du carré en cm doit être un diviseur à la fois de 24 et 60 .

- si on veut remplir un parallélépipède dont les arêtes ont pour longueur 24cm, 40cm et 60 cm avec des cubes dont les arêtes mesurent un nombre entier de cm et si on demande de chercher quelle est la valeur maximale possible pour la longueur de l'arête du cube, on cherche le PGCD de 24, 40 et 60 car la mesure de la longueur de l'arête du cube en cm doit être un diviseur à la fois de 24 et 60.

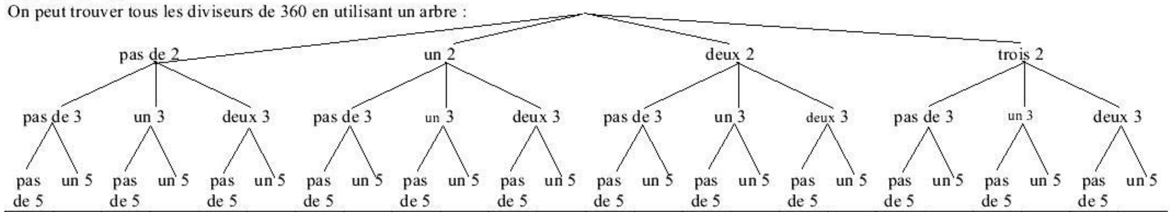
Si on cherche un nombre de taille maximale ayant telle ou telle propriété, on pense plutôt au PGCD.

6°) Remarque concernant la recherche des diviseurs d'un nombre

Exemple : recherche des diviseurs de 360

$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

On peut trouver tous les diviseurs de 360 en utilisant un arbre :



1	5	3	15	9	45	2	10	6	30	18	90	4	20	12	60	36	180	8	40	24	120	72	360

Liste des diviseurs de 360 : 1 2 3 4 5 6 8 9 10 12 15 18 20 24 30 36 40 45 60 72 90 120 180 360

Remarques :

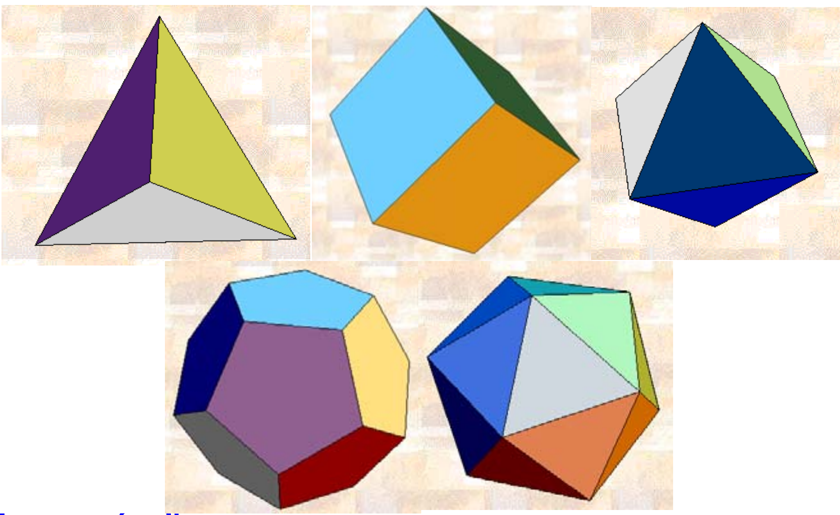
- les diviseurs peuvent être associés deux par deux en mettant ensemble deux diviseurs dont le produit vaut 360 (s'il y avait un nombre impair de diviseurs, le diviseur «du milieu » serait associé avec lui même) :
$1 \times 360 = 360$ $2 \times 180 = 360$ $3 \times 120 = 360$ etc.

- l'utilisation d'un arbre permet de comprendre immédiatement que le nombre de diviseurs de 360 est égal à $4 \times 3 \times 2$ soit 24 et que, de façon générale, **si la décomposition en un produit de facteurs premiers d'un nombre entier n vaut** $n = p^a \times q^b \times r^c \times \ldots$ **alors le nombre de diviseurs de n est égal à** $(a+1)\times(b+1)\times(c+1)\times\ldots$

♦ Polyèdre régulier

- Un polyèdre est dit régulier si
- ses faces sont toutes identiques
- ses faces sont des polygones réguliers
- ses sommets sont identiques.

- Il y a 5 polyèdres réguliers **convexes** (un polyèdre est convexe si toutes ses diagonales sont entièrement contenues dans son intérieur) :
- le tétraèdre régulier (4 faces qui sont des triangles équilatéraux)
- le cube (6 faces qui sont des carrés)
- l'octaèdre régulier (8 faces qui sont des triangles équilatéraux)
- le dodécaèdre régulier (12 faces qui sont des pentagones réguliers)
- l'icosaèdre régulier (20 faces qui sont des triangles équilatéraux)



♦ Polygone régulier

- Un polygone régulier est un polygone dont tous les côtés ont même longueur et dont tous les angles sont égaux
- Un polygone est un polygone régulier si et seulement il est inscriptible dans un cercle et tous les angles au centre déterminés par les segments joignant le centre du cercle à deux sommets successifs sont égaux.
- "Premiers" polygones réguliers : le triangle équilatéral, le carré, le pentagone régulier, l'hexagone régulier, etc.

1°) POURCENTAGES **POUR DECRIRE UNE EVOLUTION** ET PROPORTIONNALITE

- **Augmentation de t%**

Ancienne valeur x_1 x_2 x_3 …

$\times a$

Nouvelle valeur y_1 y_2 y_3 …

La nouvelle valeur est proportionnelle à l'ancienne. Le coefficient de proportionnalité, appelé aussi coefficient multiplicateur, est $\boxed{a = 1 + \frac{t}{100}}$ (avec a >1)

Remarques :

$$a = \frac{nouvelle\ valeur}{ancienne\ valeur}$$

$$t = 100 \times \frac{nouvelle\ valeur - ancienne\ valeur}{ancienne\ valeur}$$

si une quantité est multipliée par a, avec a > 1, alors cette quantité augment de t % avec t = 100 (a – 1)

- **Diminution de t%**

Ancienne valeur x_1 x_2 x_3 …

$\times a$

Nouvelle valeur y_1 y_2 y_3 …

La nouvelle valeur est proportionnelle à l'ancienne. Le coefficient de proportionnalité, appelé aussi coefficient multiplicateur, est $\boxed{a = 1 - \frac{t}{100}}$ (avec a < 1)

Remarques :

$$a = \frac{nouvelle\ valeur}{ancienne\ valeur}$$

$$t = 100 \times \frac{ancienne\ valeur - nouvelle\ valeur}{ancienne\ valeur}$$

si une quantité est multipliée par a, avec 0<a < 1, alors cette quantité diminue de t % avec t = 100 (1-a)

2°) POURCENTAGE **POUR DECRIRE UNE SITUATION** ET PROPORTIONNALITE (exemple)

On étudie la taille t des élèves d'une classe. On trouve :

Tailles en cm	$100 < t \leq 110$	$110 < t \leq 120$	$120 < t \leq 130$
Effectifs	5	7	8

Tailles en cm	$100 < t \leq 110$	$110 < t \leq 120$	$120 < t \leq 130$	Total
Effectifs	5	7	8	20
Fréquences	$\frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{7}{20} = 0,35 = \frac{35}{100}$	$\frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0,40 = \frac{40}{100}$	$\frac{20}{20} = 1$
Pourcentages (en %)	25	35	40	100
Angles au centre pour un diagramme circulaire (en °)	90	126	144	360

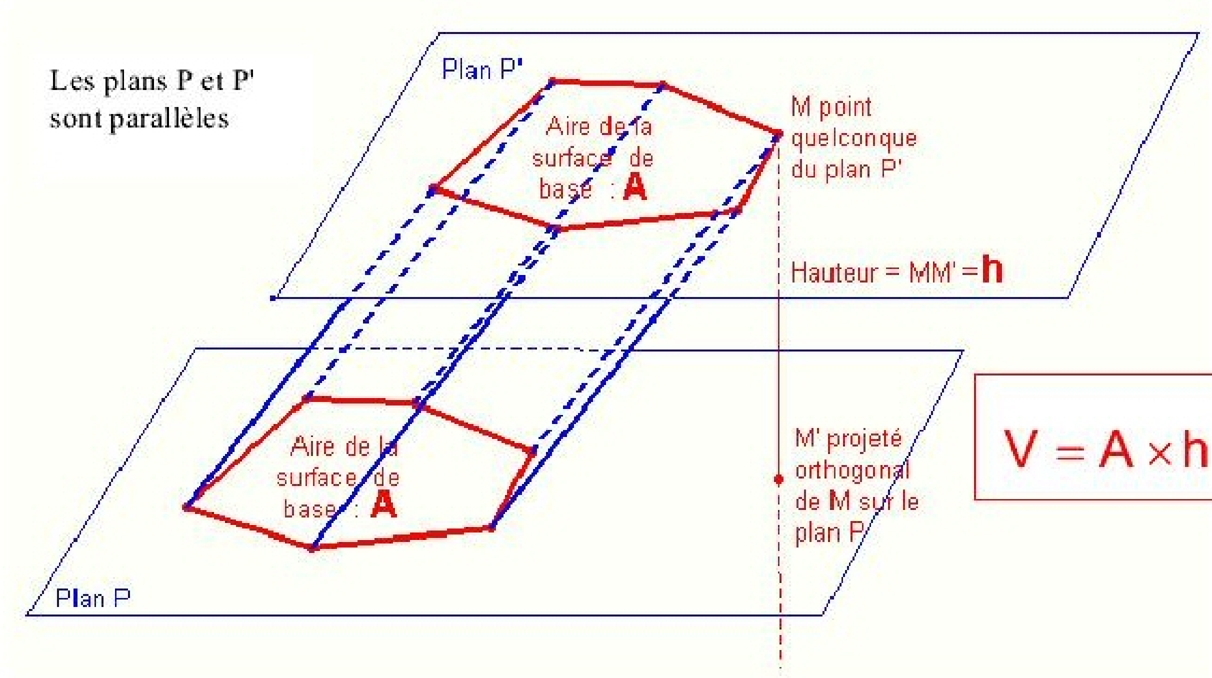
$\times 0,5$

$\times 5$

$\times 18$

♦ **PPCM : voir la rubrique *"PGCD et PPCM"* de cet aide-mémoire**

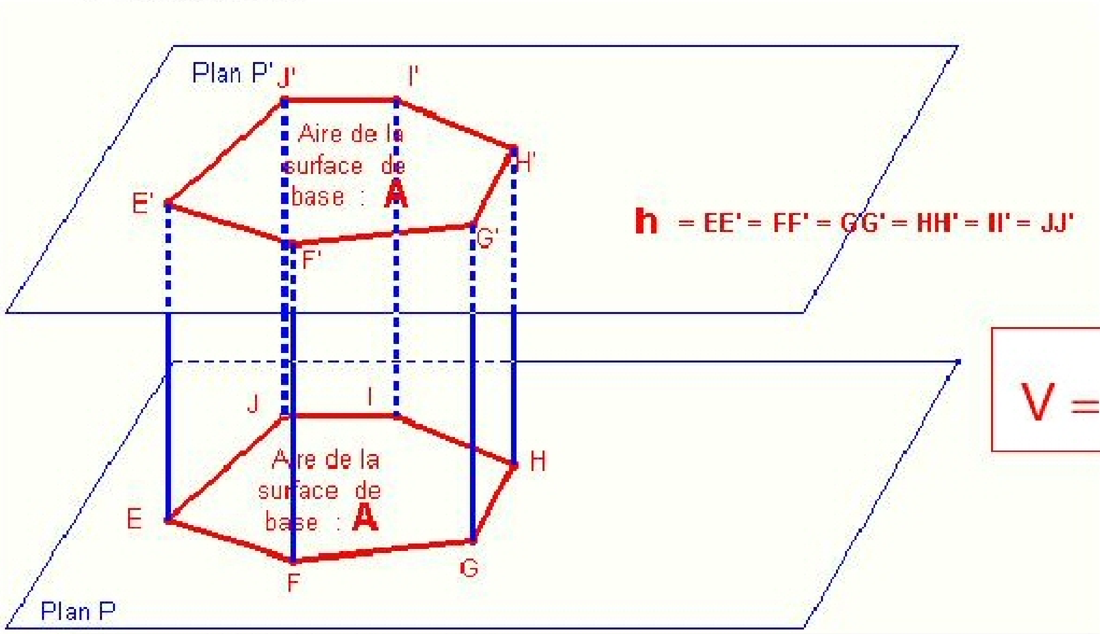
♦ **Prisme :**



$$V = A \times h$$

Cas particuliers :

Prisme droit :



$$V = A \times h$$

Cas particulier de prisme droit :

Le parallélépipède rectangle (ou pavé) $V = L \times l \times h$

Cas particulier de parallépipède rectangle :

Le cube $V = a^3$

♦ Problèmes "additifs" au cycle 2

1°) Problèmes "plus faciles" (problèmes résolus en utilisant une procédure experte dès le cycle 2)

a) Problèmes de réunions d'états où on cherche le tout

Jean a 17 billes dans sa poche droite et 18 billes dans sa poche gauche. Combien a-t-il de billes en tout ?

b) Problèmes de changement d'états où on cherche l'état final

- Jean avait 17 billes. Jean a donné 8 billes à Paul. Combien Jean a-t-il maintenant de billes ?
- Jean joue au jeu de l'oie. Il est sur la case 11 et obtient un 4 avec le dé. Sur quelle case jean doit-il aller ?

2°) Problèmes "plus difficiles" (problèmes résolus en utilisant des procédures personnelles au cycle 2)

a) Problèmes de réunions d'états où on cherche une des parties

Jean a 25 billes en tout. Il en a 18 dans sa poche gauche. Combien en a-t-il dans sa poche droite ?

b) Problèmes de changement d'états où on cherche la transformation

- Avant la récréation, Jean avait 15 billes. Après la récréation, Jean a 9 billes. Que s'est-il passé pendant la récréation ?
- Jean joue au jeu de l'oie. Avant de jouer, il était sur la case 11 et, après avoir joué, il est maintenant sur la case 14. Que s'est-il passé ?

c) Problèmes de changement d'états où on cherche l'état initial

- Avant la récréation, Jean avait des billes. Pendant la récréation, Jean a perdu 15 billes. Après la récréation, Jean a 25 billes. Combien Jean avait-il de billes avant la récréation ?
- Jean joue au jeu de l'oie. Il avance son pion de 11 cases et se retrouve à la case 25. A quelle case était Jean avant de déplacer son pion ?

d) Problèmes de comparaison d'états (CE1)

- Jean a 38 billes. Paul a 16 billes de moins que Jean. Combien Paul a-t-il de billes ?
  (recherche de l'état référé)

- Paul a 25 billes. Paul a 16 billes de moins que Jean. Combien Jean a-t-il de billes ?
  (recherche de l'état référent)

- Paul a 25 billes. Paul a 36 billes. Combien Paul a-t-il de billes en plus que Jean ?
  (recherche de la comparaison)

Remarque : les problèmes du genre « Jean a 18 billes et Paul a 26 billes. Combien Jean doit-il trouver de billes pour avoir autant de billes que Paul ? » peuvent être considérés comme des problèmes de changement d'états mais certains en font une catégorie à part appelée « problèmes d'égalisation

♦ Problème "ouvert"

- Un "problème ouvert" est un problème dont la résolution n'a pour objectif ni d'introduire une notion nouvelle ni uniquement d'appliquer ou de réinvestir des connaissances. L'objectif est de développer chez les élèves le goût de la recherche et les capacités à chercher.

- Caractéristiques d'un "problème ouvert" :
  - l'énoncé est court et concerne un domaine avec lequel l'élève a assez de familiarité pour prendre facilement "possession" de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, etc.
  - l'énoncé n'induit ni la méthode ni la solution et celle-ci ne doit pas se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des résultats vus en cours.

♦ Procédure experte et procédure personnelle

- Une procédure experte correspond à un raisonnement et à des calculs qu'utiliserait une personne experte pour résoudre un problème (l'élève reconnaît un type de problème et sait qu'on résout ce type de problème en utilisant tel ou tel outil mathématique adéquat).

- Une procédure personnelle correspond à un mode de résolution correct mais différent des modes de résolutions qu'utiliseraient des personnes expertes (par exemples schématisation et dénombrement par comptage pour trouver un résultat dans une situation où une personne experte utiliserait un calcul).

♦ Proportionnalité (rappels pour enseignants)

Exemple de grandeurs proportionnelles : Le salaire (si on est payé à l'heure) est proportionnel à la durée du travail.

Exemples de grandeurs non proportionnelles : Le "poids" d'un individu donné n'est pas proportionnel à sa taille

Propriété n°1

x	Durée du travail (en heures)	4	12
y	Salaire (en euro)	32	96

$\times 8$

8 (€ / h) est le coefficient de proportionnalité

Remarque : la fonction qui à x associe y est la fonction linéaire $x \longmapsto 8x$

Age (en années)	2	6
"Poids" (en kilogrammes)	8	10

$\cancel{\times}$

Propriété n°2 :

$\times 3$

Durée du travail (en heures)	4	12
Salaire (en euro)	32	96

$\times 3$

Il s'agit de la propriété de linéarité pour la multiplication par un nombre : $f(kx) = kf(x)$

$\times 3$

Age (en années)	2	6
"Poids" (en kilogrammes)	8	10

$\cancel{\times 3}$

Propriété n°3 :

$+$

Durée du travail (en heures)	4	12	16
Salaire (en euro)	32	96	128

$+$

Il s'agit de la propriété de linéarité pour l'addition : $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

$+$

Age (en années)	2	8	10
"Poids" (en kilogrammes)	8	10	16

$\cancel{+}$

Propriété n° 4 :
Si on fait un graphique les points sont tous sur une même droite passant par l'origine.

Si on fait un graphique les points ne sont pas tous sur une même droite passant par l'origine.

Remarques:

a) On peut écrire :

Si je travaille 4 heures, je gagne 32 €

$:4$

Si je travaille 1 heure, je gagne 32 : 4 = 8 €

$\times 5$

Si je travaille 5 heures, je gagne 5 × 8 = 40 €

b) On peut utiliser des "automatismes":

4	5
32	?

Automatisme n° 1 : $\dfrac{32 \times 5}{4}$

Automatisme n° 2 :
4 x ? = 5 x 32 (« produit en croix")

a) ~~Si j'ai 2 ans, je pèse 8 kg~~

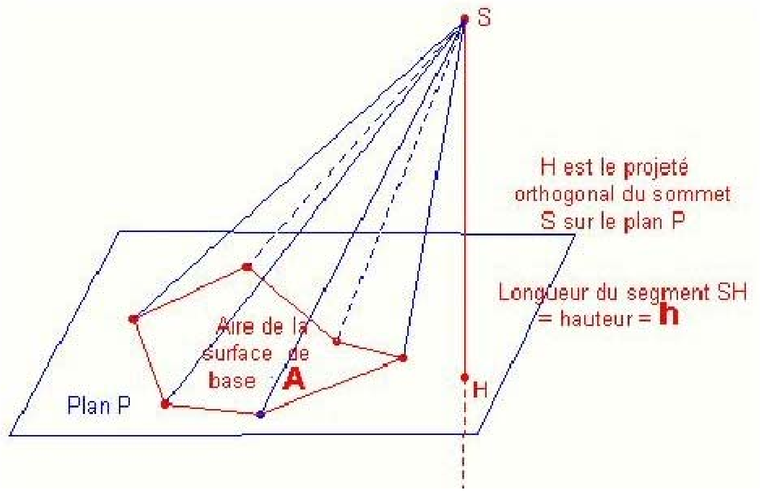
~~Si j'ai 1 an, je pèse 8 : 2 = 4 kg~~

b) On ne peut pas utiliser des "automatismes".

♦ **Propriétés de linéarité : voir la rubrique *Proportionnalité* de cet aide mémoire**

♦ **Puissances : voir la rubrique *"Exposants"* de cet aide-mémoire**

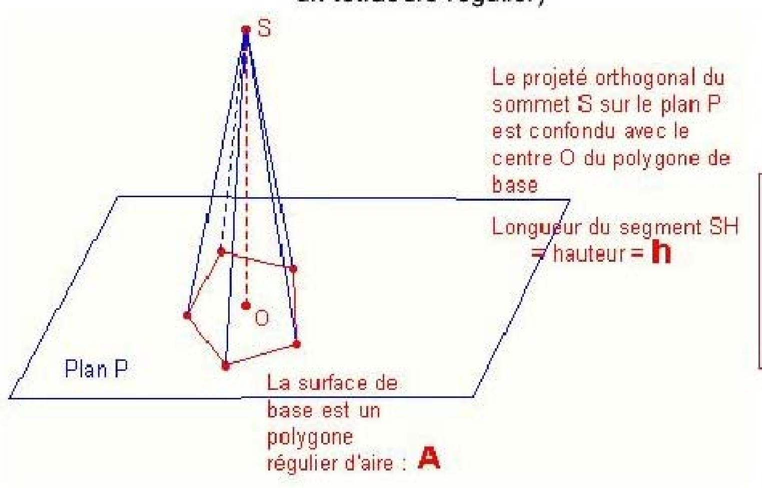
♦ **Pyramide**



$$V = \frac{1}{3} \times A \times h$$

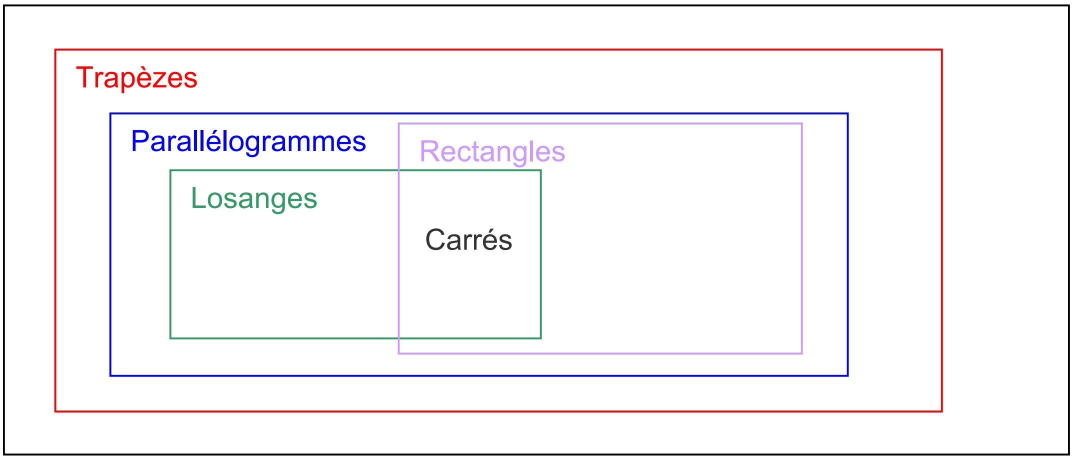
♦ **Pyramide régulière**

"Pyramide régulière" (remarque : ce n'est un polyèdre régulier que dans le cas où c'est un tétraèdre régulier)



$$V = \frac{1}{3} \times A \times h$$

♦ **Quadrilatères (familles de quadrilatères)**



♦ Quotients décimaux (exemple)

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1 & 2 & 3 & & & 7 \\ \cline{6-6}
 & 5 & 3 & & & 17,571 \\
 & & 4 & 0 & & \\
 & & & 5 & 0 & \\
 & & & 1 & 0 & \\
 & & & & 3 &
\end{array}
$$

Dans la division de 123 par 7

17, 57 est le quotient décimal approché par défaut à 0, 01 près

17,58 est le quotient décimal approché par excès à 0, 01 près

♦ Racine carrée

- Définition

Si $a \geq 0$, on définit $\sqrt{a}$ comme l'unique nombre x positif ou nul qui vérifie $x^2 = a$.
Remarque : il existe un autre nombre tel que $x^2 = a$. C'est le nombre $-\sqrt{a}$.

Si a est un "carré parfait" (c'est-à-dire si a est le carré d'un entier naturel) alors $\sqrt{a}$ est un entier (exemple : $\sqrt{25} = 5$)

Si a est un entier et n'est pas un "carré parfait", alors $\sqrt{a}$ est un nombre irrationnel (exemple : $\sqrt{7} \approx 2{,}646$)

- Résolution de l'équation $x^2 = a$.

Si $a < 0$, l'équation n'admet pas de solution.

Si $a = 0$, $x = 0$

Si $a > 0$, $\begin{cases} x = \sqrt{a} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{a} \end{cases}$

Exemples :

$x^2 = -3$ n'admet pas de solution.

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x=0$

$x^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ \text{ou} \\ x = -5 \end{cases}$

$x^2 = 13 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{13} \approx 3{,}606 \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{13} \approx -3{,}606 \end{cases}$

- Formulaire

a) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ Exemple : $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

b) $\sqrt{a^2} = |a|$ Exemples : $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$

$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

Remarque : si on sait que $a \geq 0$ alors $\sqrt{a^2} = a$.

c) Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ alors $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Exemple d'utilisation : $\sqrt{20} - \sqrt{45} + \sqrt{80} = \sqrt{4 \times 5} - \sqrt{9 \times 5} + \sqrt{16 \times 5} = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

d) Si $a \geq 0$ et b>0 alors $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

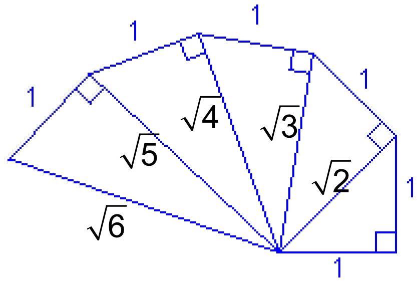
e) Attention $\sqrt{a+b}$ N'EST PAS, en général, égal à $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

Attention $\sqrt{a-b}$ N'EST PAS, en général, égal à $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

Attention $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$ n'est pas égal à $a + b$ mais à $a + 2\sqrt{ab} + b$

Attention $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2$ n'est pas égal à $a - b$ mais à $a - 2\sqrt{ab} + b$

f) Construction géométrique de $\sqrt{a}$



♦ **Rangement**

- Ranger les éléments d'un ensemble c'est appliquer à ces éléments une relation d'ordre ("du plus petit au plus grand", "du plus clair au plus foncé", "du plus aigu au plus grave", etc.)

♦ **Rectangle**

- Un quadrilatère est un rectangle si et seulement si ses angles sont des angles droits.
- Un quadrilatère est un rectangle si et seulement si c'est un parallélogramme et un de ses angles est un angle droit.
- Un quadrilatère est un rectangle si et seulement si c'est un parallélogramme et ses diagonales ont même longueur.

♦ **Registre sémiotique**

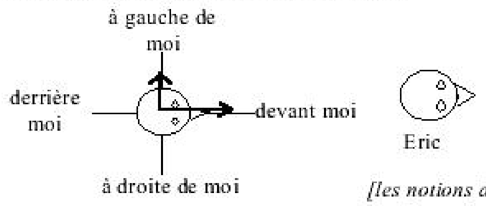
- Tout concept est caractérisé non seulement par un ensemble d'éléments et par un ensemble de propriétés communes à ces éléments mais aussi par un ensemble de représentations. Alors que certains concepts « quotidiens » peuvent être assimilés par un jeune enfant alors même qu'il aura encore du mal à le représenter (exemple : concept de frère), le risque en mathématique est de croire que parce qu'on a une certaine représentation d'un concept celui-ci est assimilé. Les concepts mathématiques sont très abstraits et ils seront construits petit à petit en particulier en multipliant les représentations dans des registres sémiotiques (registres de signes) différents. Ce qui pose problème et qui mérite que l'enseignant y réfléchisse ce sont les règles, souvent implicites, utilisées pour passer d'un registre à un autre.

♦ Repérages dans l'espace

Remarque préalable : *Il va sans dire qu'avant d'étudier des situations représentées sur une feuille de papier, il est indispensable de travailler ces situations en salle de jeux. Une étape intermédiaire intéressante peut être la représentation de la situation en trois dimensions (maquette, personnages, ...).*

1°) Les situations les plus faciles sont celles où l'élève doit situer un objet ou un autre élève par rapport à lui-même (remarque : il est donc plus facile de répondre à la question « qui est devant toi ? » que de répondre à la question « devant qui es-tu ? »).

Le repère implicite utilisé est lié à l'élève :

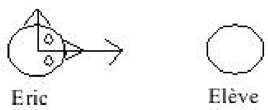


Elève : « Eric est devant moi »

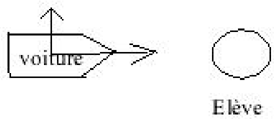
[les notions de droite/gauche étant bien sur beaucoup plus difficiles que les notions de devant/derrière du fait de la configuration du corps humain (plan de symétrie)]

2°) Viennent ensuite les situations où l'élève doit se situer par rapport à un autre élève ou par rapport à un objet ce qui l'oblige à se décentrer.

- s'il s'agit de se situer par rapport à un autre élève ou par rapport à un objet orienté, le repère implicite utilisé est lié à l'autre élève ou à « l'objet » :



Elève : « je suis devant Eric »

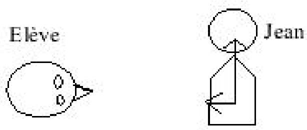


Elève : « je suis devant la voiture »

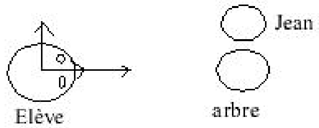
- si « l'objet » n'est pas orienté il n'y a pas de repère lié à « l'objet » :

Elève : « je suis à côté de l'arbre » ou « je suis loin de l'arbre »

3°) Les situations où l'élève doit situer un autre élève ou un objet n° 1 par rapport à un élève ou un objet n° 2 sont les plus délicates car, sans qu'on le dise, le repère est parfois lié à l'élève ou l'objet n° 2 et parfois lié au sujet qui regarde (on rencontre par exemple ce problème quand on regarde un album...) :



Elève : « Jean est devant la voiture »

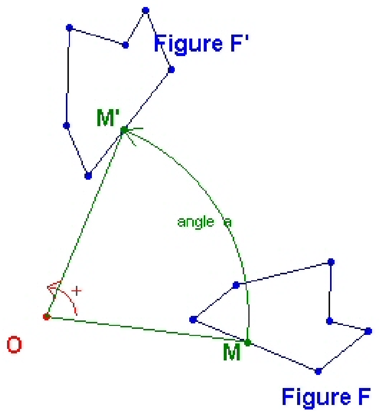


Elève : « Jean est à gauche de l'arbre »

Remarque : le 1°) correspond à une compétence figurant au programme de la maternelle ; le 2°) et le 3°) correspondent à des compétences au programme du cycle 2 (approche en GS)

2°) Codage de déplacements
Distinguer repères fixes ("Va vers la fenêtre !") et repères mobiles ("Tourne à droite !") (dans le deuxième cas le repère est lié à la personne qui se déplace)

♦ **Rotation (exemple) :**

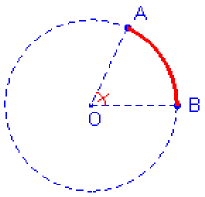


L'exemple choisi est la rotation de centre O et d'angle + 75°

- La rotation est un des quatre types d'isométrie (elle transforme une figure F en une figure F' telle que F et F' sont superposables)

♦ **Rythme : voir la rubrique *"Algorithme"* de cet aide-mémoire (deuxième signification du mot "algorithme")**

♦ **Secteur circulaire**



L'aire du secteur circulaire $\widehat{AOB}$ est proportionnelle à la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$. Donc si la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ est égale à a° alors l'aire du secteur circulaire est égale à $\frac{\pi R^2 \times a}{360}$ (R désignant le rayon du cercle).

♦ **Segment de droite (notation)**

- Notation pour un segment ouvert :]AB[(A et B sont exclus)
- Notation pour un segment fermé : [AB] (A et B sont inclus)
- Notation pour un segment semi-ouvert (et donc semi-fermé...) :]AB] (A est exclu ; B est inclus) ou [AB[(A est inclus ; B est exclu)

♦ **Similitude : voir la rubrique *"Figure semblables"* de cet aire-mémoire**

♦ **Situation-problème (signification accordée à cette expression en didactique des mathématiques)**

- Ce mot a été utilisé à une certaine époque dans les instructions officielles ; il y désignait toute situation vécue ou imaginée dans laquelle des questions étaient posées ou qui pouvaient amener à se poser des questions. Les didacticiens utilisent à l'heure actuelle ce mot dans un autre sens. Pour eux il s'agit d'une situation fabriquée dans le but de faire acquérir une connaissance précise aux élèves. Le problème posé doit avoir du sens pour l'élève et celui-ci doit pouvoir envisager ce qu'est une réponse possible. La situation doit permettre aux élèves de décider eux-mêmes si une solution trouvée est convenable ou pas. Mais leurs connaissances doivent s'avérer insuffisantes pour résoudre immédiatement le problème posé. L'élève est ainsi confronté à un obstacle, il ne peut répondre au problème en se préoccupant uniquement de ce que le maître attend de lui, par simple analogie avec des situations déjà rencontrées (on parle parfois de situation a-didactique pour dire que c'est une situation que l'élève doit gérer lui-même en faisant fonctionner ses connaissances et en les modifiant, les intentions de l'enseignant n'étant pas explicites au regard de l'élève...) L'élève va ainsi être amené à choisir une stratégie, à la modifier en cas d'échecs et en définitive à faire évoluer ses connaissances et à en construire de nouvelles (remarque : la situation doit être choisie de façon à ce que les connaissances qui sont l'objet de l'apprentissage fournissent les outils les mieux adaptés pour obtenir la solution...).

♦ Solide

- On appelle solide un objet géométrique "à trois dimensions".

Remarque : c'est un ensemble de points.

♦ Somme d'entiers consécutifs

- La somme 1 +2 +3 +...+ n est égale à $\dfrac{n\times(n+1)}{2}$

Remarque : il s'agit d'un cas particulier de la formule figurant à la rubrique suivante de cet aide-mémoire.

♦ Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

- On appelle suite arithmétique de raison r une suite de nombre construite de la manière suivante : on passe d'un terme au suivant en ajoutant r.

Exemple (suite arithmétique de raison 4) : 5   9   13   17   21   25   etc.

- La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est donné par la formule :

$$\text{nombre de termes considérés}\times\frac{\text{premier terme considéré}+\text{dernier terme considéré}}{2}$$

Exemple : 5 + 9 +13 + 17 + 21 + 25 = $6\times\dfrac{5+25}{2}=6\times15=90$

♦ Soustraction (techniques posées pour la soustraction avec retenue)

Première technique : (méthode "traditionnelle")

$$\begin{array}{rcc} & 6 & {}^{1}5 \\ - & 2_{1} & 8 \\ \hline & 3 & 7 \end{array}$$

Deuxième technique : (méthode "par cassage")

$$\begin{array}{rcc} & \overset{5}{\cancel{6}} & {}^{1}5 \\ - & 2 & 8 \\ \hline & 3 & 7 \end{array}$$

Troisième technique : ("addition à trous")

$$\begin{array}{rcc} & 6 & 5 \\ - & 2_{1} & 8 \\ \hline & 3 & 7 \end{array}$$

♦ Surface : voir la rubrique "*Objet géométrique"* de cet aide-mémoire

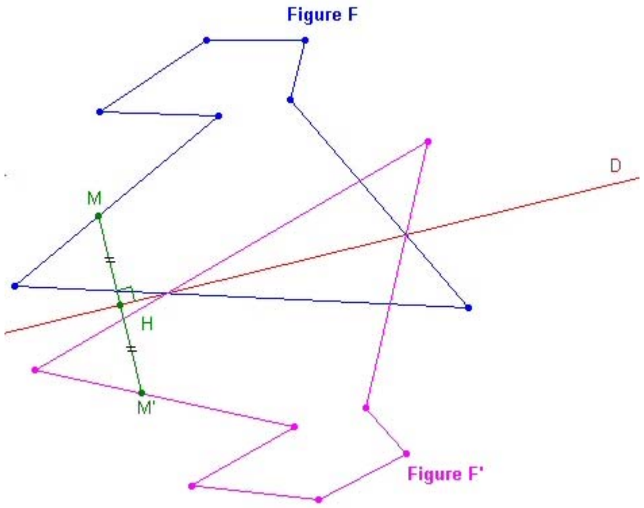
- On appelle surface un objet géométrique "à deux dimensions".

Remarque : c'est un ensemble de points.

♦ Sphère (formulaire)

- La surface d'une sphère de rayon R est égale à $4\pi R^2$.
- Le volume d'une sphère de rayon R est égal à $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

♦ Symétrie axiale (orthogonale)

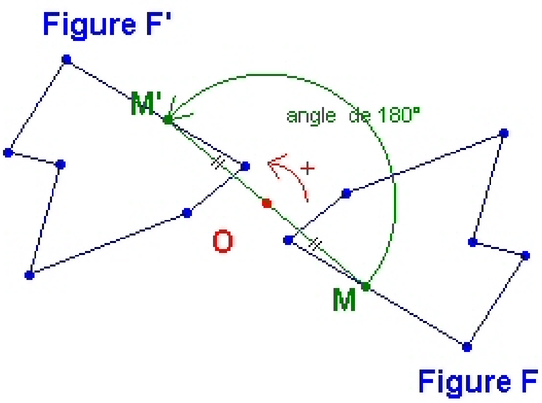


La symétrie axiale (orthogonale) est un des quatre types d'isométrie (elle transforme une figure F en une figure F' telle que F et F' sont superposables)

♦ Symétrie centrale

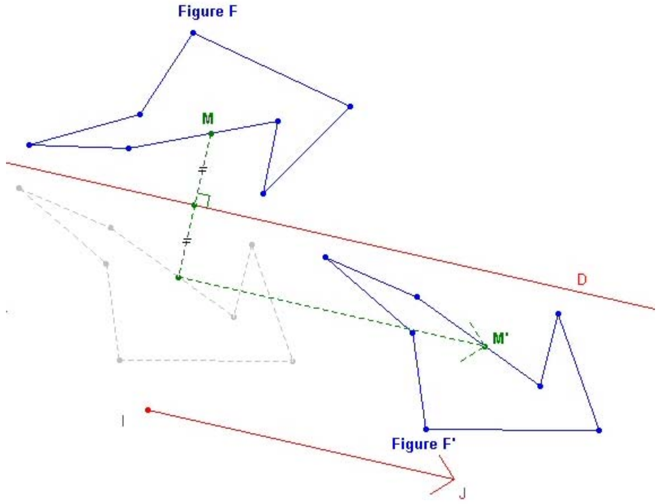
- La symétrie centrale est en fait une rotation (rotation de 180° ou demi-tour)

Remarque : c'est aussi une homothétie de rapport –1.



♦ Symétrie glissée

- La symétrie glissée est un des quatre types d'isométrie (elle transforme une figure F en une figure F' telle que F et F' sont superposables)



- La symétrie glissée est la transformation obtenue en faisant se succéder une symétrie axiale (orthogonale) et une translation ayant pour direction la direction de la droite qui est l'axe de la symétrie axiale.

♦ Système de deux équations du premier degré à deux inconnues (exemples de résolution)

Exemples de résolutions de systèmes de deux équations à deux inconnues

1°) Premier exemple (cas général correspondant au cas où les droites représentant les deux équations sont sécantes) :

$$\begin{cases} -2x + 3y = -21 \\ \text{et} \\ -5x - 4y = -18 \end{cases}$$

a) Première méthode : on garde une des deux équations et on remplace l'autre par une combinaison des deux équations faisant disparaître soit x soit y.

$$\begin{cases} -2x + 3y = -21 \\ \text{et} \\ 15y + 8y = -105 + 36 \end{cases}$$

(si appelle L_1 et L_2 les lignes du système précédent cette ligne correspond à la combinaison $5L_1 - 2L_2$)

La deuxième ligne permet de calculer y : $23y = -69$ soit $y = -3$.
Ensuite la première ligne permet de calculer x : $-2x - 9 = -21$ soit $-2x = -12$ soit $x = 6$.

Le système admet donc une seule solution : $\begin{cases} x = 6 \\ \text{et} \\ y = -3 \end{cases}$

b) Deuxième méthode : on exprime soit x en fonction de y soit y en fonction de x en utilisant une des deux équations et on garde l'autre équation.

$$\begin{cases} y = \dfrac{-21+2x}{3} \\ \text{et} \\ -5x - 4y = -18 \end{cases}$$

En « injectant » la formule permettant d'exprimer y en fonction de x (ou x en fonction de y) dans l'équation qu'on a gardée, on obtient une équation permettant de trouver x (ou y) :

$$-5x - 4\frac{-21+2x}{3} = -18 \text{ soit } -15x - 4(-21+2x) = -54$$

$$\text{soit } -15x + 84 - 8x = -54 \text{ soit } -23x = -138 \text{ soit } x = \frac{-138}{-23} \text{ soit } x = 6.$$

On trouve ensuite la valeur de l'autre inconnue : $y = \dfrac{-21+12}{3} = -3$

Le système admet donc une seule solution : $\begin{cases} x = 6 \\ \text{et} \\ y = -3 \end{cases}$

2°) Deuxième exemple (premier cas particulier correspondant au cas où les deux droites représentant les équations sont confondues) :

$$\begin{cases} -2x + 3y = -21 \\ \text{et} \\ 6x - 9y = 63 \end{cases}$$

a) Si on utilise la première méthode on obtient, par exemple :

$$\begin{cases} -2x + 3y = -21 \\ \text{et} \\ \qquad 0y = 0 \end{cases}$$

(si appelle L_1 et L_2 les lignes du système précédent cette ligne correspond à la combinaison $3L_1 + L_2$)

Remarques :
- on voulait faire disparaître les x et on s'aperçoit que, sans que ce soit voulu au départ, les y disparaissent aussi
- pour bien comprendre ne pas oublier d'écrire 0y et pas 0 à gauche du signe =

On s'aperçoit qu'on peut donner la valeur qu'on veut à y (car tout nombre y vérifie $0y = 0$) mais qu'alors x doit valoir $\frac{-21-3y}{-2}$ soit $\frac{21+3y}{2}$.

> Le système admet donc une infinité de solutions : $\begin{cases} x = \frac{21+3y}{2} \\ \text{et} \\ y \text{ quelconque} \end{cases}$
>
> Exemples de solutions : $\begin{cases} x = 12 \\ \text{et} \\ y = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 24 \\ \text{et} \\ y = 9 \end{cases}$ etc.

b) Si on utilise la deuxième méthode on obtient, par exemple :

$$\begin{cases} y = \frac{-21+2x}{3} \\ \text{et} \\ 6x - 9y = 63 \end{cases}$$

En « injectant » la formule permettant d'exprimer y en fonction de x dans l'équation qu'on a gardée, on obtient :

$6x - 9\frac{-21+2x}{3} = 63$ soit $18x - 9(-21+2x) = 189$ soit $18x - 18x = 189 - 189$ soit $0x = 0$.

On s'aperçoit qu'on peut donner la valeur qu'on veut à x (car tout nombre x vérifie $0x = 0$) mais qu'alors y doit valoir $\frac{-21+2x}{3}$.

Le système admet donc une infinité de solutions : $\begin{cases} x \text{ quelconque} \\ \text{et} \\ y = \frac{-21+2x}{3} \end{cases}$

Exemples de solutions : $\begin{cases} x = 12 \\ \text{et} \\ y = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = 24 \\ \text{et} \\ y = 9 \end{cases}$ etc.

3°) Troisième exemple (deuxième cas particulier correspondant au cas où les deux droites représentant les équations sont strictement parallèles) :

$$\begin{cases} -2x + 3y = -21 \\ \text{et} \\ 6x - 9y = 64 \end{cases}$$

a) Si on utilise la première méthode on obtient, par exemple :

$$\begin{cases} -2x + 3y = -21 \\ \text{et} \\ 0y = 1 \end{cases}$$

(si appelle L_1 et L_2 les lignes du système précédent cette ligne correspond à la combinaison $3L_1 + L_2$)

Remarques :
- on voulait faire disparaître les x et on s'aperçoit que, sans que ce soit voulu au départ, les y disparaissent aussi
- pour bien comprendre ne pas oublier d'écrire 0y et pas 0 à gauche du signe =

On s'aperçoit que le système n'a pas de solution (car aucun nombre y ne vérifie $0y = 1$).

Le système n'admet aucune solution.

b) Si on utilise la deuxième méthode on obtient, par exemple :

$$\begin{cases} y = \frac{-21+2x}{3} \\ \text{et} \\ 6x - 9y = 64 \end{cases}$$

En « injectant » la formule permettant d'exprimer y en fonction de x dans l'équation qu'on a gardée, on obtient :

$6x - 9\frac{-21+2x}{3} = 64$ soit $18x - 9(-21+2x) = 192$ soit $18x - 18x = 192 - 189$ soit $0x = 3$.

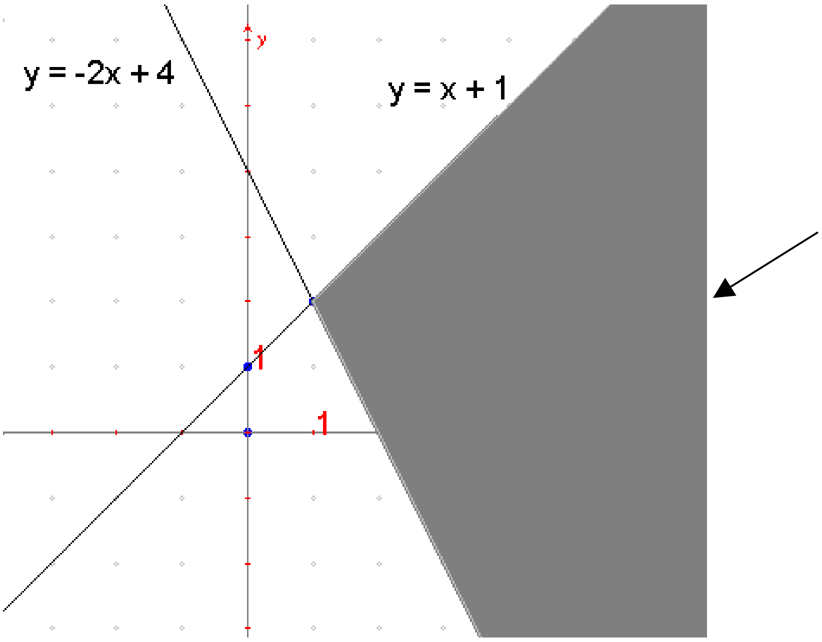
On s'aperçoit que le système n'a pas de solution (car aucun nombre x ne vérifie $0x = 3$).

Le système n'admet aucune solution.

♦ Système de deux inéquations du premier degré à deux inconnues (exemple)
Voir aussi la rubrique *"Inéquation du premier degré à deux inconnues"* de cet aide-mémoire pour comprendre comment on trouve les régions qui conviennent pour chacune des inéquations

Exemple choisi : représenter graphiquement les solutions du système $\begin{cases} -x+y-1<0 \\ -y-2x+4<0 \end{cases}$

$$\begin{cases} -x+y-1<0 \\ -y-2x+4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<x+1 \\ -y<2x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<x+1 \\ y>-2x+4 \end{cases}$$

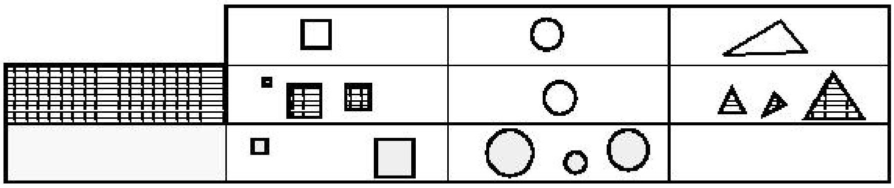


La région coloriée correspond à l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x,y) sont des solutions du système.

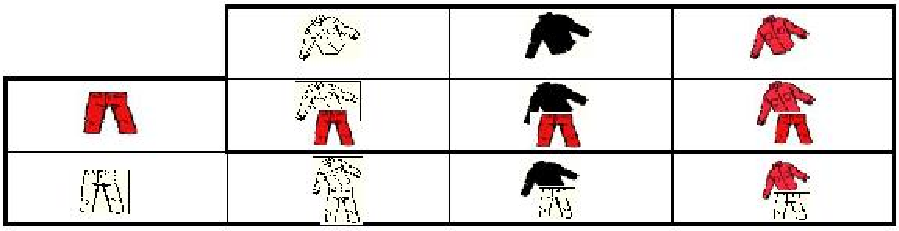
♦ Tableau à double entrée (différents types de tableau à double entrée)

Le tableau à double entrée est un outil souvent utilisé en mathématiques mais dans des situations très diverses. On peut utiliser un tableau à double entrée :

1°) comme outil pour aider à effectuer une double classification des éléments d'un ensemble :



2°) comme outil pour aider à trouver tous les éléments d'un produit cartésien :



3°) comme outil pour représenter une relation :

	Puzzle	Peinture	Collage
Alain	X		X
Paul	X		

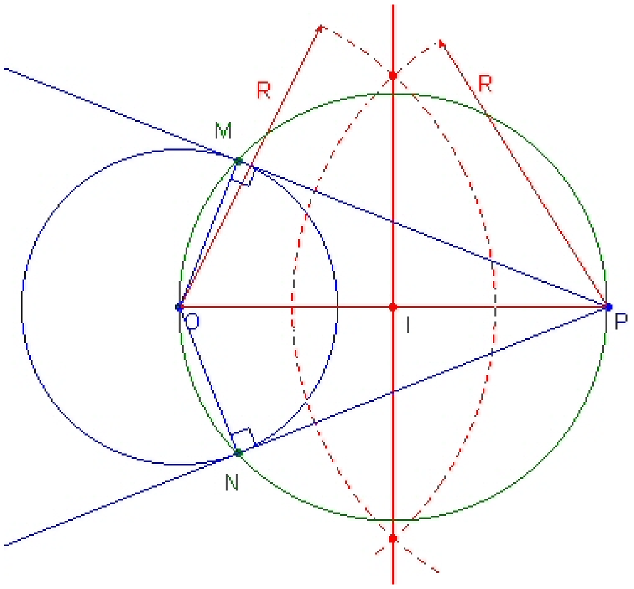
ou même :

	Puzzle	Coloriage
Alain	1-5	2-6
Paul	2-5-6	4

4°) comme outil pour représenter une loi de composition interne :

	jaune	rouge
bleu	vert	violet
rouge	orange	rouge

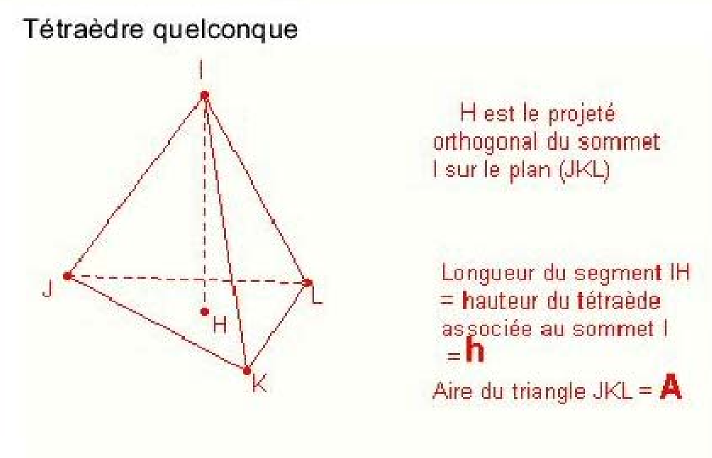
♦ Tangentes à un cercle (construction des tangentes à un cercle passant par un point donné extérieur au cercle)



1°) On a tracé le milieu I de [OP] en traçant la médiatrice de [OP].

2°) On a tracé le cercle de centre I passant par O et P.

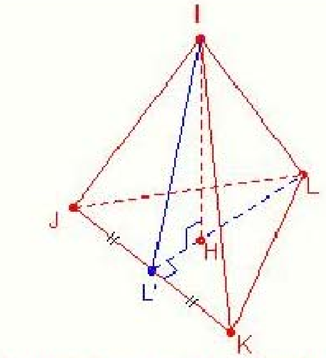
♦ Tétraèdre



$$V = \frac{1}{3} \times A \times h$$

Remarque : le tétraèdre est un cas particulier de pyramide

♦ Tétraèdre régulier



Les trois faces sont des triangles équilatéraux

H, projeté orthogonal du sommet I sur le plan (JK) est le centre du triangle équikatéral JKL

Longueur du segment IH = hauteur associée au sommet I = **h**

Aire du triangle JKL = **A**

Soit a la longueur des arêtes

$A = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

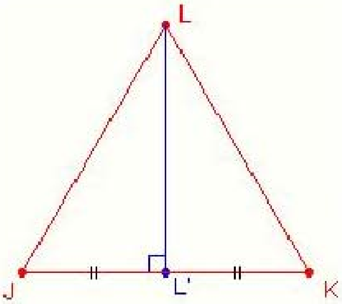
Volume du tétraèdre régulier :

$\frac{1}{3} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$= \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Explications :

Calcul de **A** :



Calcul de LL' hauteur du triangle équilatéral JLL' :
(on utilise le théorème de Pythagore)

$$JL'^2 + LL'^2 = JL^2 \text{ donc } LL'^2 = JL^2 - JL'^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$LL' = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

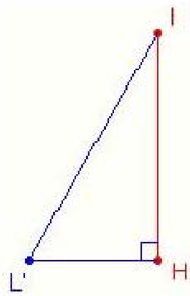
Calcul de A :

$$A = \frac{1}{2} \times JK \times LL' = \frac{1}{2} \times a \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Calcul de **h**

$h = IH$

Or, d'après le théorème de Pythagore, $IL'^2 = IH^2 + L'H^2$ donc $IH^2 = IL'^2 - L'H^2$



Valeur de IL' :

IL' vaut, comme LL', $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Calcul de L'H

H est le centre du triangle équilatéral JKL. Il est donc, en particulier, le centre de gravité du triangle JKL et est donc situé au tiers de la médiane LL' en partant de L'.

$$L'H = \frac{1}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

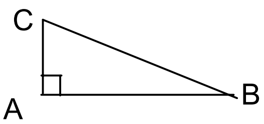
Retour au calcul de IH :

$$IH^2 = IL'^2 - L'H^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36} = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{12} = \frac{9a^2 - a^2}{12} = \frac{8a^2}{12} = \frac{2a^2}{3}$$

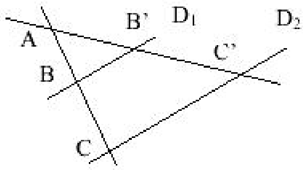
Donc $h = IH = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

♦ Théorème de Pythagore

- Si un triangle ABC est rectangle en A, alors BC² = AB²+AC²



♦ Théorème de Thalès et théorème réciproque du théorème de Thalès



ou

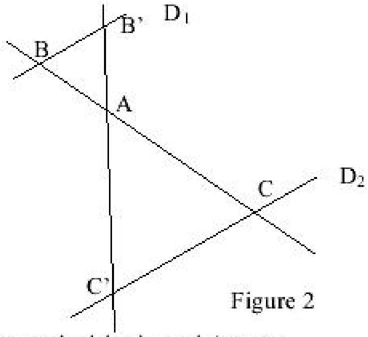


Figure 1

Figure 2

Figures valables pour le théorème de Thalès et pour le théorème réciproque.

1°) Théorème de Thalès

Si D_1 et D_2 sont parallèles alors :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$$

Remarques :

a) A la place de $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$, on peut écrire $\frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C'}$ ou $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{AC'}$ ou etc.

b) On démontre qu'on a en fait

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{BB'}{CC'}$$

Mais, attention, si on utilise un autre rapport que $\frac{AB}{AC}$ (voir remarque a), on ne peut pas faire intervenir les longueurs BB' et CC'.

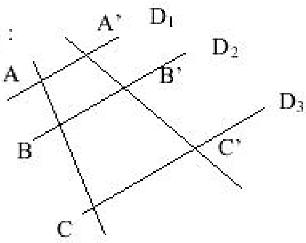
c) Au collège, on voit le cas particulier suivant :

Si B est le milieu de [AC] et si (BB') est parallèle à (CC'), alors B' est le milieu de [AC'].
Ce n'est qu'un cas particulier du théorème de Thalès.

c) Il y a une forme plus générale du théorème :

Si D_1, D_2, et D_3 sont parallèles alors :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$



2°) Théorème réciproque du théorème de Thalès (A NE PAS CONFONDRE AVEC LE THEOREME DE THALES)

Si $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$, alors la droite (BB') est parallèle à la droite (CC').

Remarque : au collège, on voit le cas particulier suivant :
Si B est le milieu de [AC] et B' est le milieu de [AC'] alors la droite (BB') est parallèle à la droite (CC'). Ce théorème, souvent appelé « théorème des milieux », est un cas particulier du théorème réciproque du théorème de Thalès.

♦ Théorème en acte (ou théorème-élève)

- Théorème jugé vrai par l'élève et utilisé par lui. Il a son propre champ de validité mais il produit des résultats faux hors de ce champ de validité.
  Exemple: « Quand on multiplie un nombre par 10 on ajoute un 0 ».

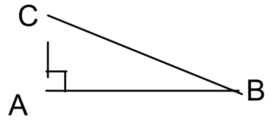
♦ Théorème réciproque d'un théorème

• Soit un théorème T du type "si P est vrai alors Q est vrai".
La proposition "si Q est vrai alors P est vrai" peut-être vraie ou fausse.
Quand elle est vraie elle prend le nom de théorème réciproque du théorème T.

• Exemple :
Pour les entiers naturels, on a le théorème T suivant "si l'écriture décimale de x se termine par 0 alors x est pair" mais la proposition "si x est pair alors l'écriture décimale de x se termine par un 0" est FAUSSE). Il n'y a donc pas, dans ce cas, de théorème réciproque du théorème T.

♦ Théorème réciproque du théorème de Pythagore

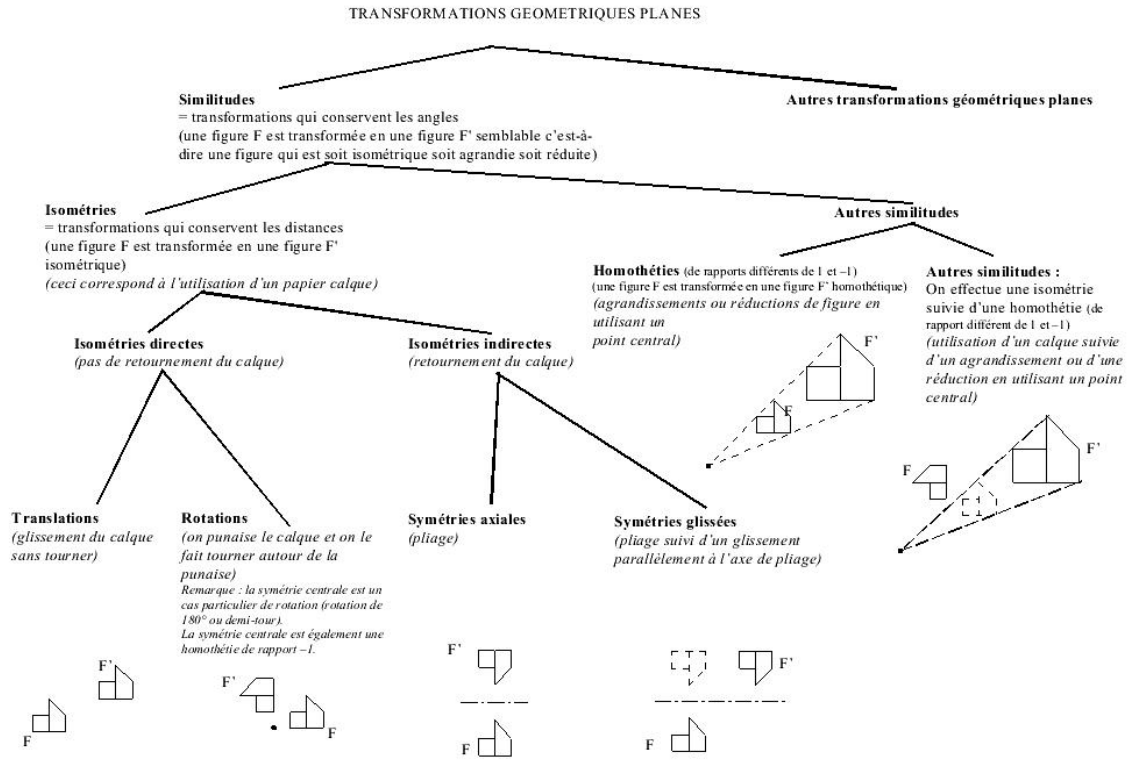
- Si un triangle ABC est tel que BC² = AB²+AC², alors le triangle ABC est rectangle en A.



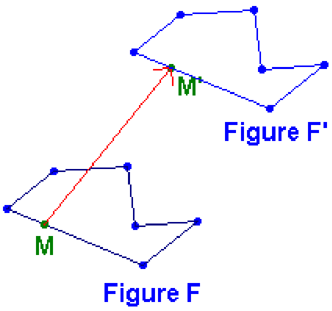
♦ Théorème réciproque du théorème de Thalès : voir la rubrique *"Théorème de Thalès et théorème réciproque du théorème de Thalès"* de cet aide-mémoire

♦ Transformations géométriques

LA DERNIERE PAGE DE CET AIDE-MEMOIRE EST UNE VERSION AGRANDIE DE CET ORGANIGRAMME

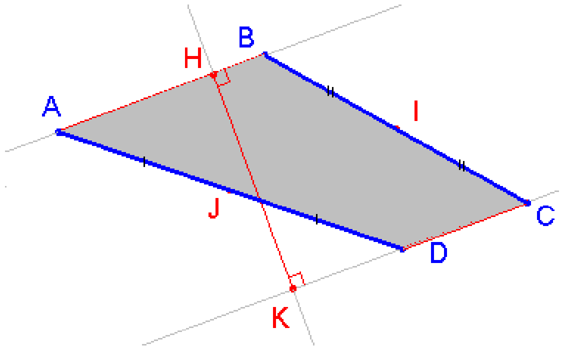


♦ **Translation**



- La translation est un des quatre types d'isométrie (elle transforme une figure F en une figure F' telle que F et F' sont superposables)

♦ **Trapèze**



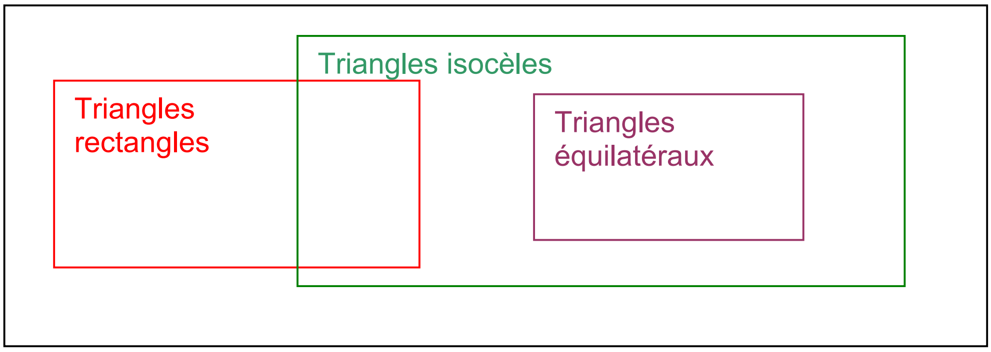
- Un quadrilatère est un trapèze si et seulement si il a deux côtés parallèles.
- Aire = $\dfrac{AB + CD}{2} \times HK = IJ \times HK$ (avec I milieu du segment [BC] et J milieu du segment [AD])

♦ **Trapèze isocèle**

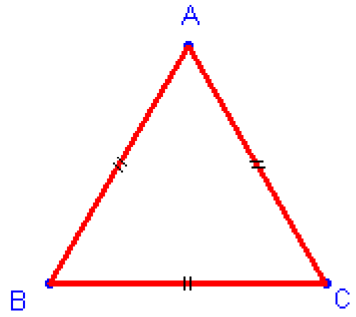
- Un trapèze dont les deux côtés non parallèles sont de même longueur est appelé trapèze isocèle.

♦ **Tri : voir la rubrique *"Classement et tri"* de cet aide-mémoire**

♦ **Triangles (familles de triangles)**

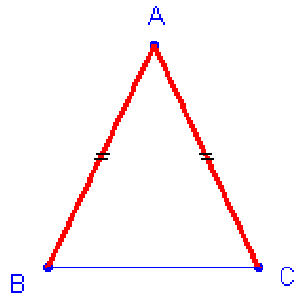


♦ Triangle équilatéral



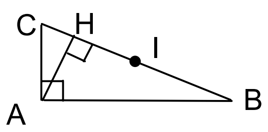
- Un triangle est un triangle équilatéral si et seulement si ses trois côtés ont même longueur.
- Un triangle est un triangle équilatéral si et seulement si ses trois angles sont égaux.
- Un triangle est un triangle équilatéral si et seulement si deux de ses angles valent 60°.

♦ Triangle isocèle



- Un triangle est un triangle isocèle si et seulement il possède deux côtés de même longueur.
- Un triangle est un triangle isocèle si et seulement si il possède deux angles égaux.

♦ Triangle rectangle



- Un triangle ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si : $\widehat{BAC} = 90°$
- Un triangle ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AC^2 + AB^2$
- Un triangle ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si le milieu I de [BC] vérifie IA = IB (autrement dit si et seulement si le cercle de diamètre [BC] passe par A]
- Calcul de la hauteur AH :

L'aire du triangle BAC est d'une part égale à $\frac{AB \times AC}{2}$ et d'autre part égal à $\frac{AH \times BC}{2}$

On en déduit que $AH = \frac{AB \times AC}{BC}$

♦ Triangle rectangle isocèle

- Un triangle peut être à la fois rectangle et isocèle (ses angles mesurent 90°, 45° et 45°)

♦ Triangles homothétiques : voir la rubrique "*Figures homothétiques*" de cet aide-mémoire

♦ Triangles isométriques : voir la rubrique "*Figures isométriques*" de cet aide-mémoire

♦ Triangle scalène

- Un triangle qui a trois côtés de longueurs différentes est appelé triangle scalène.

♦ Triangles semblables : voir la rubrique "*Figures semblables*" de cet aide-mémoire

♦ Valeur médiane

Rappels : En statistique l'ensemble que l'on observe est appelé **population** (exemple 1 : ensemble des élèves d'une classe ; exemple 2 : ensemble des véhicules neufs immatriculés en France en 2005). Chaque élément de l'ensemble est appelé **individu** ou **unité statistique.** La propriété étudiée est appelée **caractère** (pour l'exemple 1, le caractère peut, par exemple, être le sexe ou le nombre de frères ou sœurs ; pour l'exemple 2, le caractère peut être, par exemple, la marque ou la puissance en CV). Si les **valeurs** que peut prendre le caractère ne sont pas des nombres, le caractère est appelé **caractère qualitatif** (pour l'exemple 1, le caractère « sexe », qui peut prendre les valeurs « masculin » ou « féminin », est un caractère qualitatif ; pour l'exemple 2, le caractère « marque » est un caractère qualitatif). Si les **valeurs** prises par le caractère sont des nombres, le caractère est appelé **caractère quantitatif** (pour l'exemple 1, c'est le cas pour le nombre de frères ou sœurs et, pour l'exemple 2, c'est le cas pour la puissance en CV).

- On appelle (valeur) médiane une valeur qui permet de faire apparaître deux sous-ensembles de même effectif dans la population: un sous-ensemble d'individus pour lesquels la valeur du caractère étudié est supérieure ou égale à la médiane et un sous-ensemble d'individus pour lesquels la valeur du caractère étudié est inférieure ou égale à la valeur médiane.

Exemple : si on suppose les individus rangés selon les valeurs croissantes du caractère étudié alors la valeur médiane sera égale

- à la valeur du caractère pour le 51ème individu si l'effectif total est égal à 101
- à la moyenne des valeurs du caractère pour les 50ème et 51ème individus si l'effectif total est égal à 100.

♦ Valeur(s) modale(s)

- En statistique, on appelle mode(s) [ou valeur(s) modale(s)] la (les) valeur(s) correspondant à l'effectif maximum

♦ Valeur moyenne

- Première formule utilisable :

Si un caractère prend les n valeurs x_1, x_2,..., x_n avec pour effectifs respectifs e_1, e_2 ,..., e_n et si l'effectif total e_1+....+e_n est noté N, alors la moyenne $\overline{x}$ est donnée par la formule :

$$\overline{x} = \frac{e_1x_1 + e_2x_2 + \ldots + e_nx_n}{e_1 + e_2 + \ldots e_n} = \frac{e_1x_1 + e_2x_2 + \ldots + e_nx_n}{N}$$

- Deuxième formule utilisable :

Si un caractère prend les n valeurs x_1, x_2,..., x_n avec pour fréquences respectives f_1, f_2 ,..., f_n alors la moyenne $\overline{x}$ est donnée par la formule :

$$\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots f_nx_n$$

♦ Valeurs approchées (exemples)

$\sqrt{7} \approx 2{,}645751311$

- Valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 0,001 près : 2,646 (car le chiffre suivant est un 7 : si le chiffre suivant est 0 un 1 ou 2 ou 3 ou 4 "on arrondit au-dessous" ; si le chiffre suivant est 5 un 6 ou 7 ou 8 ou 9 "on arrondit au-dessous")
- Valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 0,001 près par défaut : 2,645
- Valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 0,001 près par excès : 2,646

♦ Variable didactique

- Dans une situation donnée une variable didactique est un élément dont la variation est susceptible de modifier le processus de résolution que les élèves vont adopter.

♦ Vitesse

- Si un véhicule se déplace à vitesse constante, la durée du parcours t, la distance parcourue d et la vitesse v sont reliés par les formules $d = v \times t$ $\quad v = \frac{d}{t}$ $\quad t = \frac{d}{v}$
- Si un véhicule se déplace durant un temps t à une vitesse v_1 puis durant le même temps à la vitesse v_2 , sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours vaut $\frac{v_1 + v_2}{2}$. Mais, attention, si un véhicule parcourt une distance d à la vitesse v_1 puis la même distance d à la vitesse v_2, sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours ne vaut pas $\frac{v_1 + v_2}{2}$ (on peut démontrer qu'elle vaut $\frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$).

♦ Volume d'un solide

- Le volume est une grandeur attachée à un solide : c'est "la place qu'il y a à l'intérieur du solide".
- Si le solide est "creux", son volume est appelé contenance (ou capacité).
- Unités usuelles :

		km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3
												hl	dal	l	dl	cl	ml			

- Formules : elles figurent dans cet aide-mémoire (voir les rubriques concernant les différents solides)

* Ajout concernant les nombres décimaux

Erreurs "classiques" :

Appliquer aux décimaux une règle valable pour les entiers

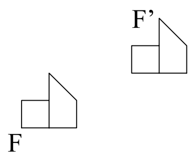
(exemples d'erreur : $2,8 \times 10 = 2,80$; $2,8 < 2,19$ car 2,19 a plus de chiffres que 2,8)

Considérer une écriture à virgule comme le juxtaposition de deux entiers séparés par une virgule

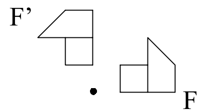
(exemples d'erreurs : $2,8<2,19$ car $8<19$; $2,8+3,9 = 5,17$)

TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES PLANES

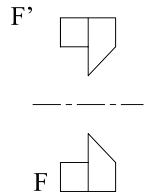
- **Similitudes**
  = transformations qui conservent les angles
  (une figure F est transformée en une figure F' semblable c'est-à-dire une figure qui est soit isométrique soit agrandie soit réduite)
  - **Isométries**
    = transformations qui conservent les distances
    (une figure F est transformée en une figure F' isométrique)
    (ceci correspond à l'utilisation d'un papier calque)
    - **Isométries directes**
      (pas de retournement du calque)
      - **Translations**
        (glissement du calque sans tourner)



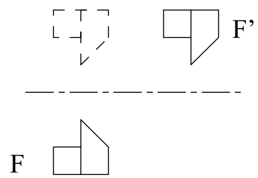
      - **Rotations**
        (on punaise le calque et on le fait tourner autour de la punaise)
        Remarque : la symétrie centrale est un cas particulier de rotation (rotation de 180° ou demi-tour).
        La symétrie centrale est également une homothétie de rapport –1.



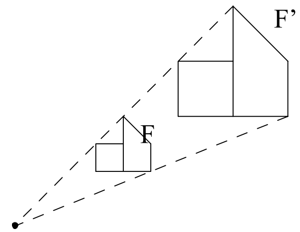
    - **Isométries indirectes**
      (retournement du calque)
      - **Symétries axiales**
        (pliage)



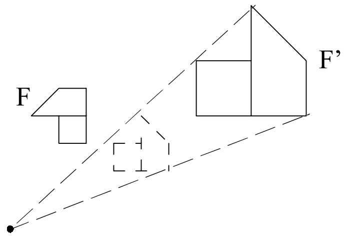
      - **Symétries glissées**
        (pliage suivi d'un glissement parallèlement à l'axe de pliage)



  - **Autres similitudes**
    - **Homothéties** (de rapports différents de 1 et –1)
      (une figure F est transformée en une figure F' homothétique)
      (agrandissements ou réductions de figure en utilisant un point central)



    - **Autres similitudes :**
      On effectue une isométrie suivie d'une homothétie (de rapport différent de 1 et –1)
      (utilisation d'un calque suivie d'un agrandissement ou d'une réduction en utilisant un point central)



- **Autres transformations géométriques planes**