

Pictura Stella Octangula Du 3D au 2D

Vers un scénario pédagogique

Les pistes proposées ici concernent la très belle figure illustrée ci-contre. Elles sont exploitables, après amendements éventuels, pendant les deux dernières années du Cycle III.

Nota : toutes les annexes citées ici sont regroupées dans un document intitulé **PSO_Tender.pdf**

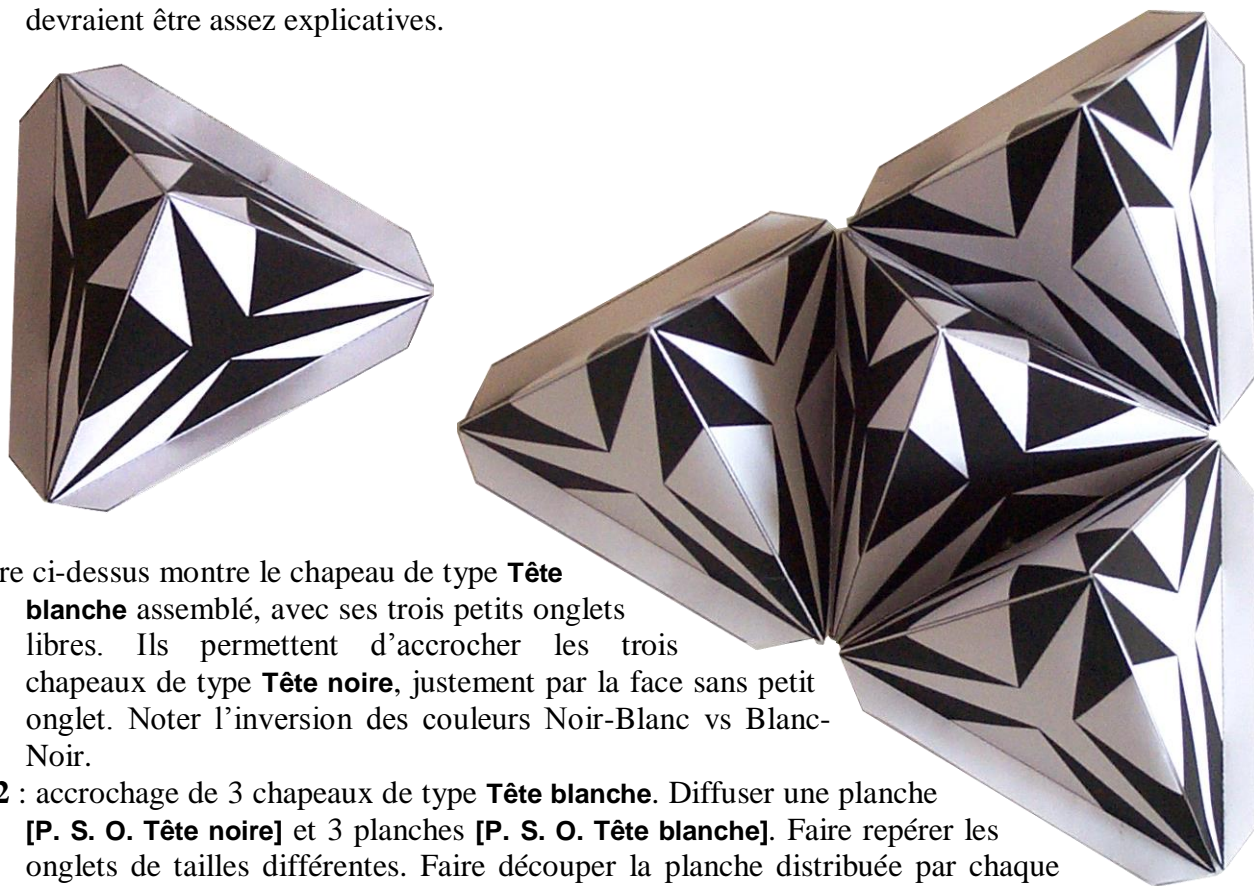
Première partie : construction du solide

Travail par groupes de 4 ou de 8. A l'issue de cette phase, chaque groupe dispose d'un solide. Au CM, il est préférable de travailler par groupes de 4. En formation d'adultes, des groupes de 8 suffisent.

Voie directe

Le solide peut être vu comme constitué de 8 *chapeaux*, liés les uns aux autres. Le travail consiste à découper ces chapeaux depuis des planches préparées, puis à les assembler. La phase n°3 est un peu délicate ; on pourra donc lui préférer la voie indirecte.

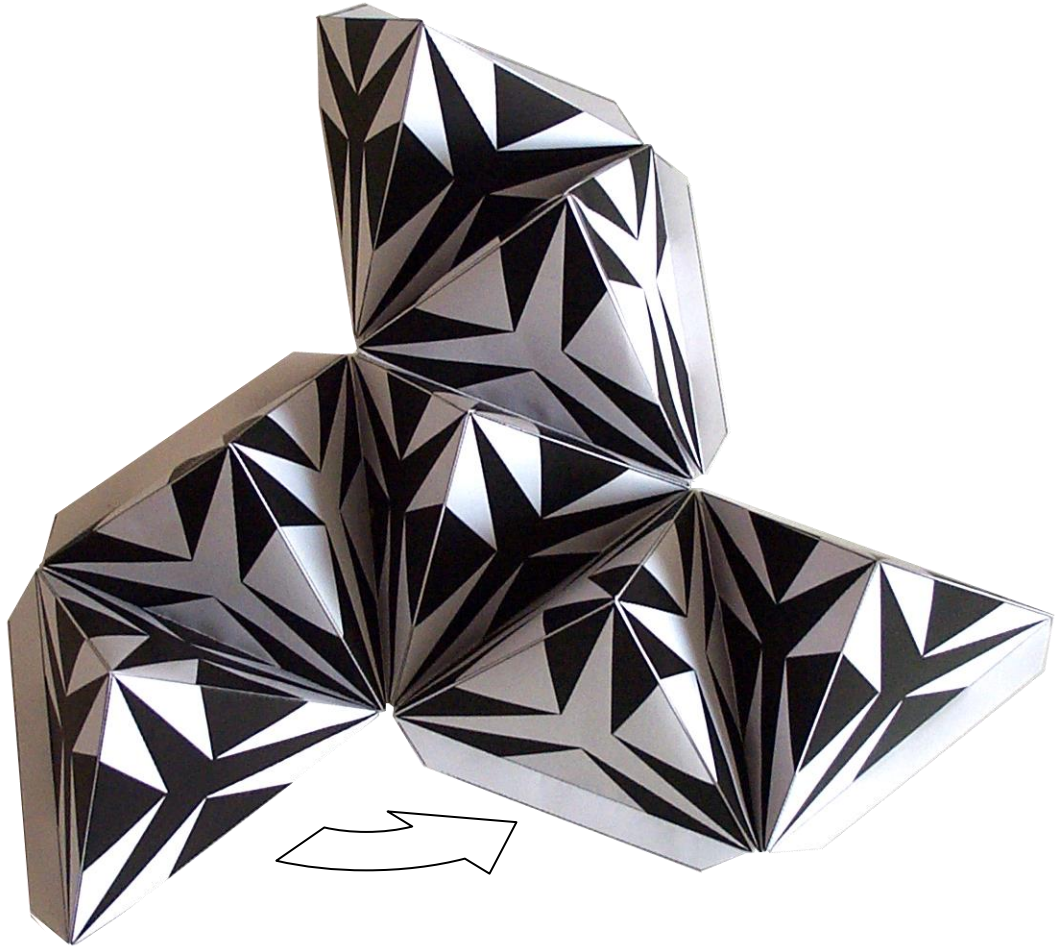
Phase 1 : préparation des chapeaux. Diffuser une planche [**P. S. O. Tête blanche**] et 3 planches [**P. S. O. Tête noire**]. Faire repérer les onglets de tailles différentes. Faire découper la planche distribuée par chaque récipiendaire. Demander aux possesseurs des planches [**P. S. O. Tête noire**] d'ébarber l'un des petits onglets (de facto *celui du milieu*, car gênant pour la suite). Faire assembler chaque chapeau. Puis recoller le chapeau **blanc** à chacun des chapeaux **noirs**. Les figures ci-dessous devraient être assez explicatives.



La figure ci-dessus montre le chapeau de type **Tête blanche** assemblé, avec ses trois petits onglets libres. Ils permettent d'accrocher les trois chapeaux de type **Tête noire**, justement par la face sans petit onglet. Noter l'inversion des couleurs Noir-Blanc vs Blanc-Noir.

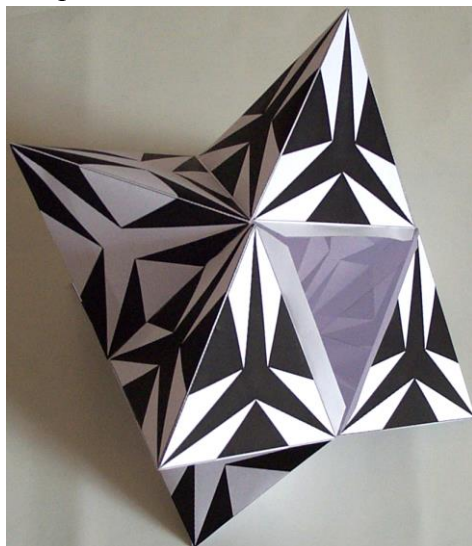
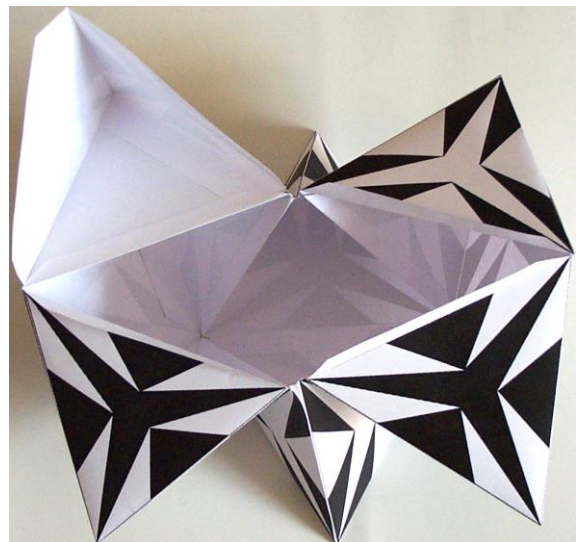
Phase 2 : accrochage de 3 chapeaux de type **Tête blanche**. Diffuser une planche [**P. S. O. Tête noire**] et 3 planches [**P. S. O. Tête blanche**]. Faire repérer les onglets de tailles différentes. Faire découper la planche distribuée par chaque récipiendaire. Demander aux possesseurs des planches [**P. S. O. Tête blanche**] d'ébarber deux des petits onglets (de facto *pas celui du milieu*, car gênants pour la suite). Le propriétaire de la planche [**P. S. O. Tête noire**] doit, quant à lui, éliminer l'ensemble de tous les petits onglets. Puis

faire assembler chaque chapeau. Commencer par faire recoller chacun des 3 chapeaux **blancs** ainsi produits au montage déjà existant. S'inspirer de l'illustration suivante :



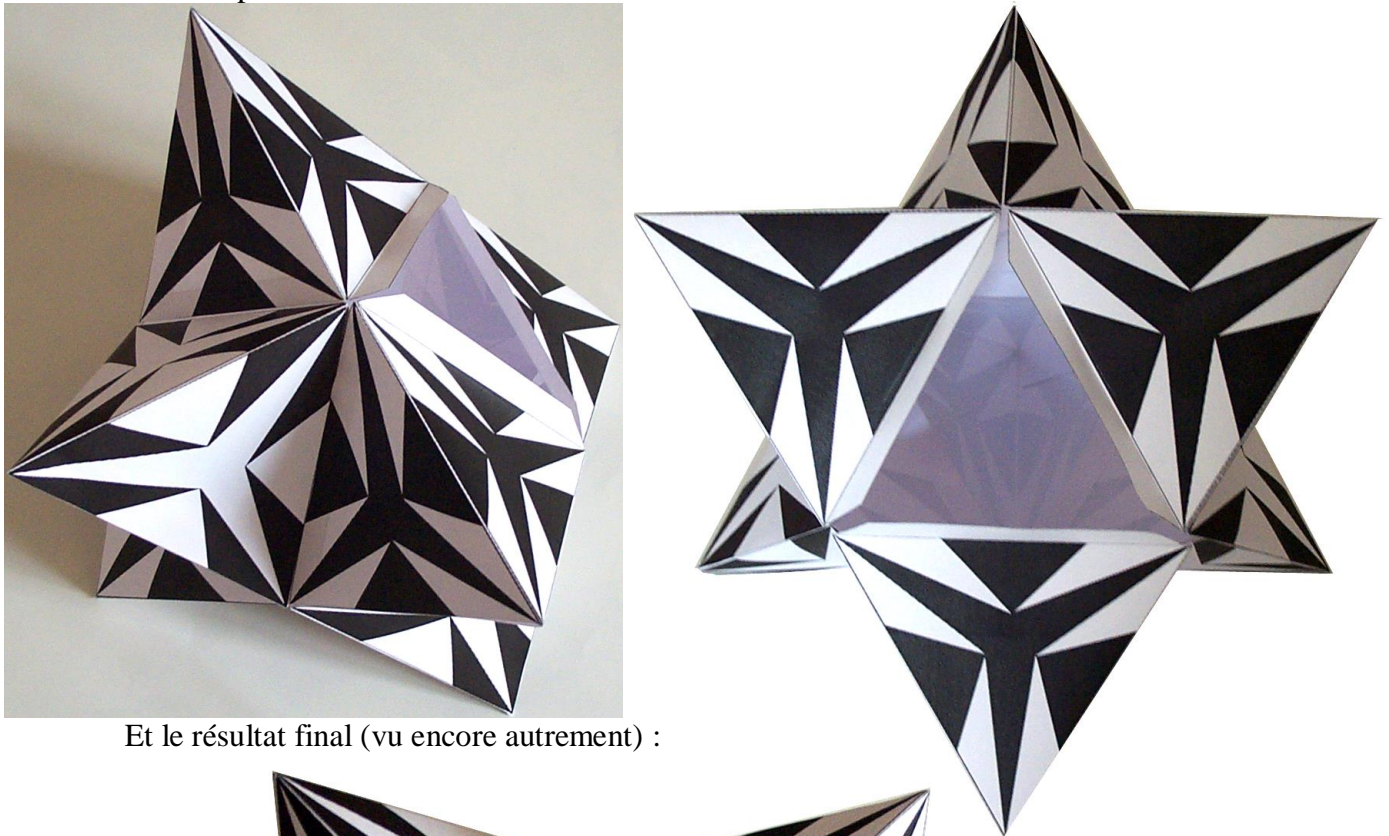
Bien observer la position des divers onglets encore présents. Voici la phase décisive !

Phase 3 : où l'on commence à refermer la construction. Raccorder l'un des chapeaux extrêmes à son voisin libre. Sur la figure ci-dessus, la flèche arquée indique ce mouvement. Voici un état possible du chantier à ce point du travail : Contrairement à l'apparence, les 2 chapeaux à droite de la photo ne sont pas encore attachés. Continuer à rattacher, grâce aux onglets disponibles les chapeaux encore (un peu) libres. Voici ce que l'on doit obtenir :



Il ne reste donc plus qu'à coller un dernier chapeau, le chapeau de type **Tête noire**, rappel, sans petit onglet. 3 onglets sont encore disponibles. L'accroche à un premier se fait sans souci. Mais, comme d'habitude, lorsque l'on achève l'assemblage d'un patron de solide, on a du mal à coller les tout derniers onglets. D'où les conseils habituels : bien faire rebiquer les onglets libres, encoller (pas trop) avec de la colle

liquide onglets et intérieurs des faces libres, rapprocher. Voici deux images illustrant cette dernière phase :



Et le résultat final (vu encore autrement) :

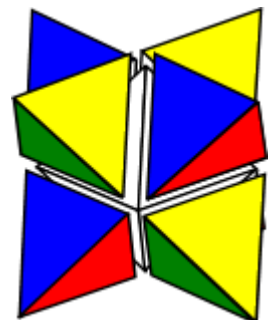


Voie indirecte

L'assemblage final demande patience et dextérité. Selon les classes, il peut se révéler plus sûr d'adopter la démarche consistant à faire construire (voire même à distribuer) un cœur octaédrique sur les faces duquel on colle des tétraèdres.

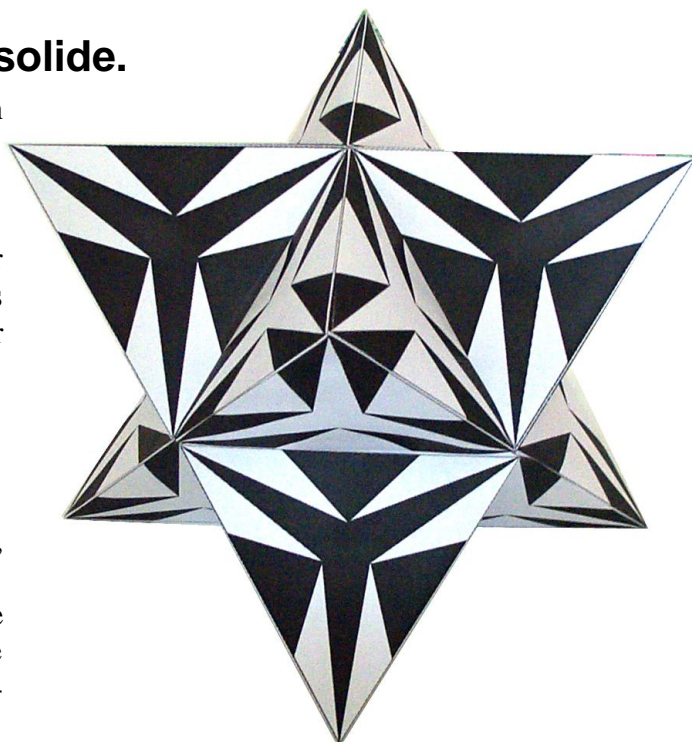
On trouvera sur la planche **[P. S. O. Support Têtes (2)]** le patron d'un demi octaèdre, à dupliquer deux fois avant assemblage. Noter que l'on peut coller certains des onglets à l'extérieur. Puis distribuer quatre exemplaires des planches **[P. S. O. Tête noire (2)]** et **[P.**

S. O. Tête blanche (2)]. Notez sur ces planches les faces triangulaires sans décor, qui viendront se coller précisément sur les faces du cœur octaédrique. Notez enfin, que l'un des deux (demi-)onglets attachés à cette face peut être collé par-dessus la face blanche. On tient donc un patron relativement facile à construire par des petites mains, à condition d'employer de la colle blanche à passer au pinceau.



Seconde partie : observation du solide.

Encore une image ! A comparer avec la première en tête de cet article.



Analyse des sommets

* Compter le nombre de sommets et les classer selon leur valence (c'est à dire le nombre d'arêtes qui les relient à d'autres sommets) : on doit trouver deux familles.

	Nombre
Sommets de valence 3	
Sommets de valence 8	

* Où sont situés les sommets de valence 8, relativement aux sommets de valence 3 ?

On attend deux repérages : chaque sommet de valence 8 est coplanaire avec 4 sommets de valence 3, d'une part, au centre du carré formés par ces 4 sommets d'autre part.

* Si on peut relier chaque sommet de valence 3 à ses plus proches voisins de valence 3, combien de liaisons trouvera-t-on ? Que dessinent dans l'espace ces liaisons virtuelles ? Variante de cette question : si on doit fabriquer une boîte pour ranger le solide, quelle forme doit-on lui donner ?

Analyse des arêtes

* Compter le nombre d'arêtes et les classer selon leur degré d'incidence à chaque extrémité (c'est à dire le nombre d'arêtes qui aboutissent au même sommet) : on trouve là encore deux familles.

	Nombre
Arêtes d'indices 2-7	
Arêtes d'indices 7-7	

* Les arêtes d'indices 2-7 se laissent regrouper 4 par 4 autour d'un sommet commun : que font-elles apparaître ? Les arêtes 7-7 se laissent aussi regrouper 4 par 4 pour former dans l'espace une figure là aussi très simple. De quelle forme s'agit-il dans les deux cas ?

Analyse des faces

* Dédurre du nombre de sommets de valence 3 le nombre total de faces du solide et remplir le tableau ci-dessous :

Nombre total de Faces	Nombre total d'arêtes	Nombre total de sommets
F =	A =	S =
Validation (formule d'Euler ¹)		F - A + S =

* En observant bien le solide, on peut considérer qu'il s'agit de la fusion de deux solides simples *qui se seraient rentrés l'un dans l'autre* ... De quoi s'agit-il ?

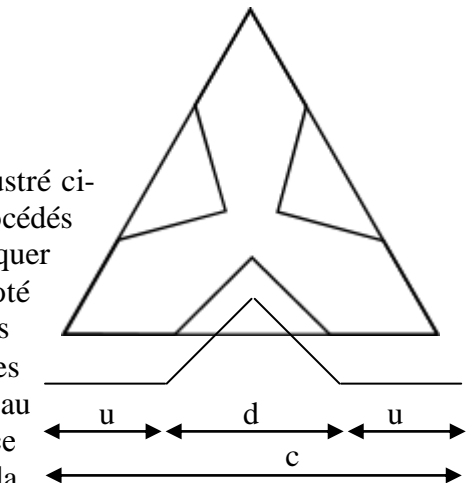
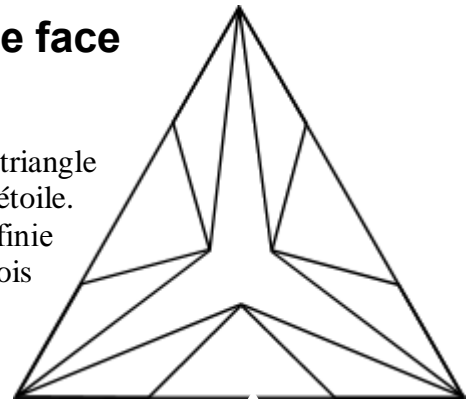
Il est difficile d'aller plus avant au cycle 3 dans l'observation de Stella Octangula. La décoration des faces n'a joué qu'un rôle mineur. On va donc lui consacrer la partie suivante. En classe, l'argument pourrait être le suivant : préparer une sculpture *gigantesque* en vue d'une exposition ... Cette construction n'est pas impossible si on découpe des panneaux dans des cartons d'emballage, par exemple d'appareils ménagers : on tient assez facilement des montages d'un mètre cube !

¹ On doit trouver 2

Troisième partie : analyse de la géométrie d'une face

Analyse globale

- * Diffuser la planche [**Motif dérivé**]². Faire nommer les figures connues : triangle équilatéral contenant 6 triangles isocèles, trois triangles rectangles et une étoile. Faire repérer que le polygone en forme d'étoile (de type Mercedes) est définie entièrement par la donnée du triangle équilatéral externe et des trois triangles rectangles apposés sur les bords du triangle externe. Faire colorier au besoin ces différentes formes grâce à un code couleur.
- * Retour sur la caractérisation des formes : seul le compas permet de vérifier l'isocélité de certains triangles, d'où découle que les triangles rectangles sont isocèles et partant des demi-carrés.



Dans ce qui suit, on ne s'occupera plus de l'étoile Mercedes.

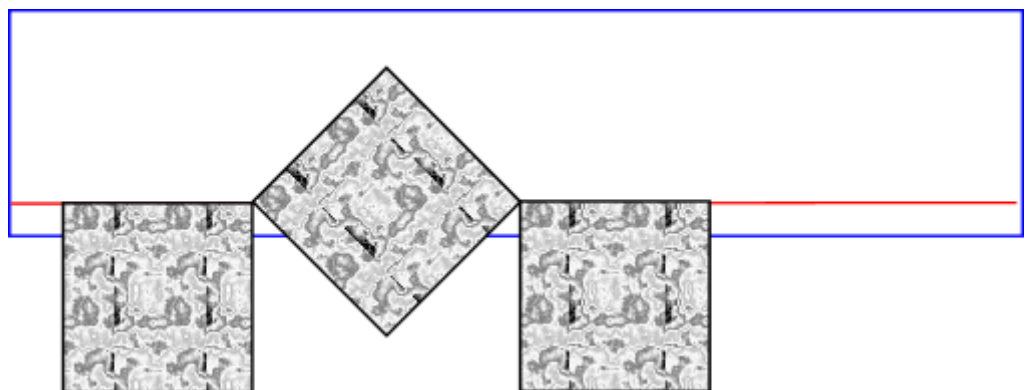
- * Le motif sur lequel on travaillera dorénavant se simplifie en celui illustré ci-contre. L'objectif est de produire, à diverses tailles, et selon divers procédés cette figure. Sans glisser dans une mathématique aboutie, on doit remarquer qu'il ne sera pas aisé de construire la figure en se donnant la valeur du côté du triangle équilatéral. Si on appelle c cette valeur, puis u et d les mesures des 3 segments composant ce côté, alors : $d = u \cdot \sqrt{2} \Rightarrow c = u \cdot (2 + \sqrt{2})$. Ces valeurs ne permettent pas de produire directement u à partir de c . Tout au plus peut-on retenir que c est environ 3,4 fois plus grand que u ... Dans ce qui suit, on adoptera donc la démarche inverse, en se donnant a priori la valeur de u , pour gagner celle de c .

Marqueterie...

Travail individuel. Les opérations qui suivent ressemblent à des consignes.

Op 1 Diviser une feuille A4 en trois selon la largeur : on tient trois bandes de 21 cm par un peu moins de 10 cm. Sur chacune de ces bandes, faire tracer au crayon un trait à 1 cm environ du bord le plus long.

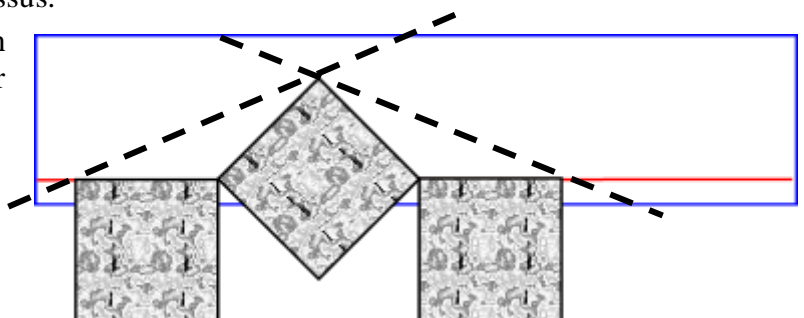
Op 2 Préparer par ailleurs 9 carrés de 5 cm de côté. *Multiplés possibilités pour l'enseignant : préparer les carrés et les donner à découper, récupérer des chutes de papier peint à maille carrée, distribuer du papier quadrillé ou pointé pour faire tracer ...*



Op 3 Sur chaque bande, faire coller trois carrés selon le principe illustré ci-dessus.

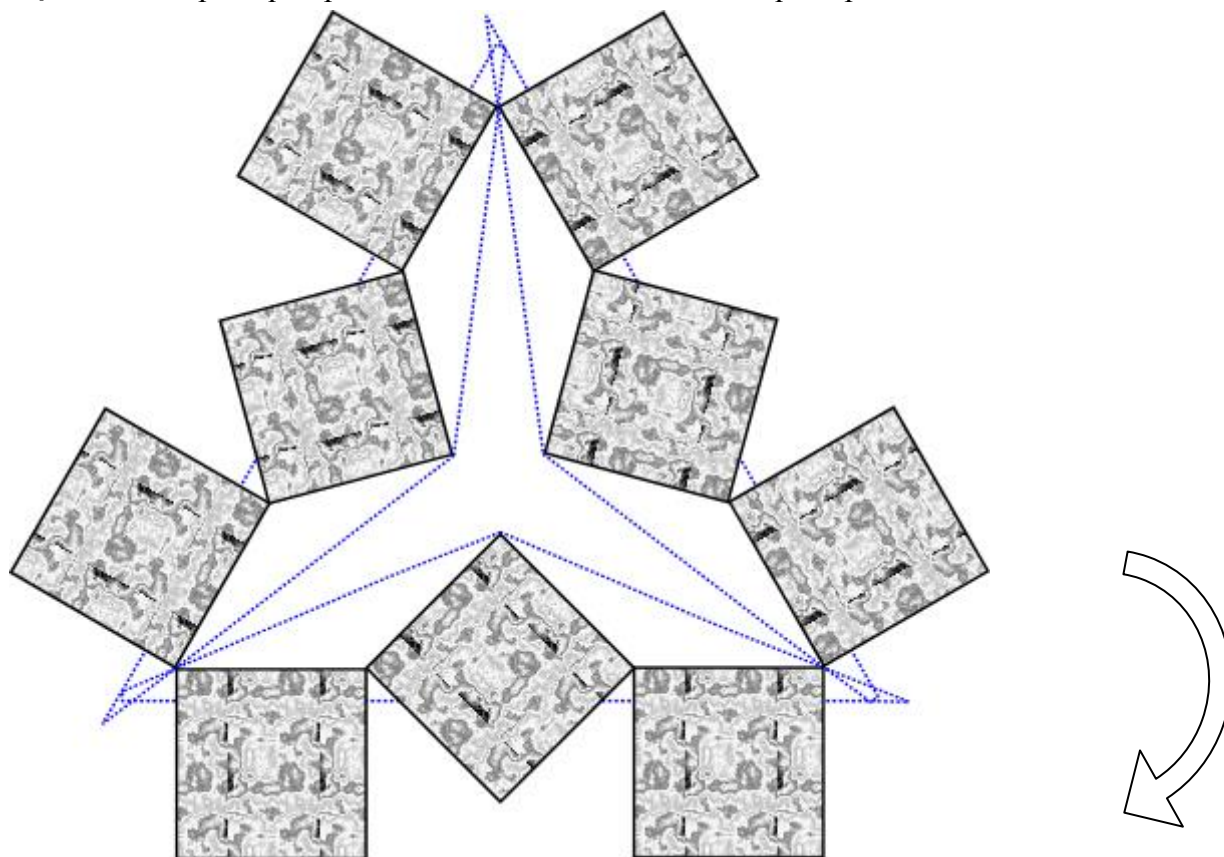
Op 4 Sur chaque bande, faire tracer au crayon léger les limites de découpe comme indiqué sur la figure réduite ci-contre. Puis faire découper.

Op 5 Préparer une dernière feuille, sur laquelle on colle les 3 panneaux préparés lors d'**OP 4**. Bien entendu, l'assemblage doit révéler un triangle équilatéral.



² Rappel : Issu du document annexe **PSO_Tender.pdf**

Op 6 Ne reste plus qu'à peaufiner le travail en ébarbant ce qui dépasse ! Illustration ici :

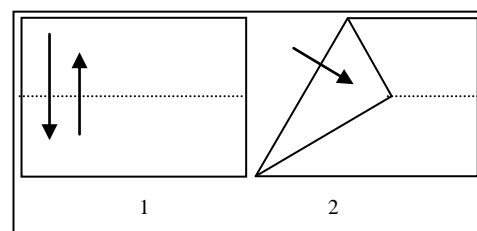


... et pliages

On revient sur la proposition précédente. Il est très facile de produire des carrés de toutes tailles par un rapide pliage. Qui n'a jamais produit un carré à partir d'une feuille de papier A4 ? On va maintenant utiliser cette technique, associée à celle permettant d'engendrer un triangle équilatéral, toujours par pliage. Noter qu'il suffira de disposer d'un demi-carré en trois exemplaires, d'une règle et d'un crayon, pour engendrer le motif voulu. Le (demi-)carré fonctionnera autant comme gabarit que comme pièce d'assemblage. Ce faisant, on économise papiers et étapes, et l'on se rapproche d'une stratégie purement géométrique. Voici un synopsis possible.

Op 0 Choisir une feuille A4 ; la plier en 4 selon sa largeur ; en découper le premier quart puis déplier le restant. A ce point, on tient une bande d'environ 21 par 7,25 cm et une feuille presque carrée de 21 cm de coté environ.

Op 1 On transforme la feuille "carrée" en une ébauche de triangle équilatéral : On commence par plier la feuille longueur sur longueur afin de marquer sa plus grande médiane. Après dépliement, l'on rabat le coin supérieur gauche sur cette médiane. Attention : cette opération demande un peu de minutie. Un triangle d'angles 60, 90, 30 degrés apparaît. Bien marquer le pli, puis déplier.



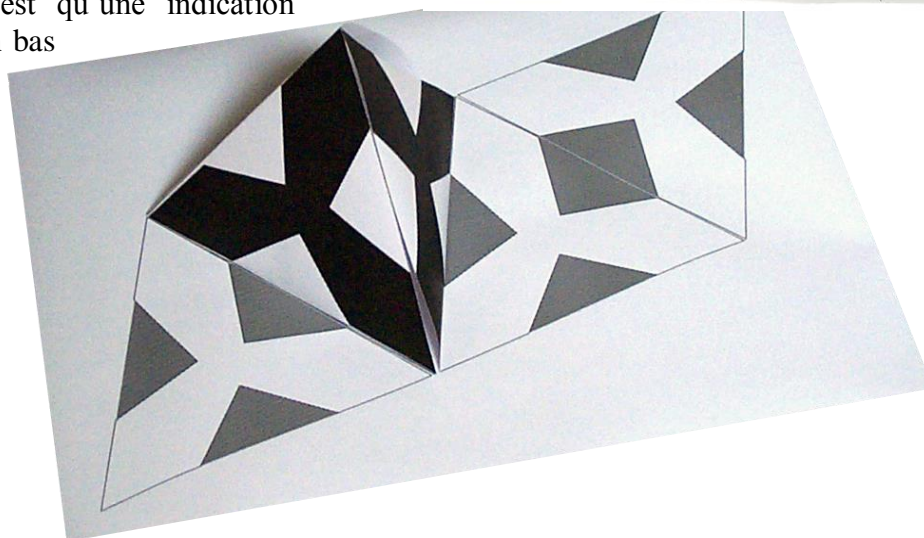
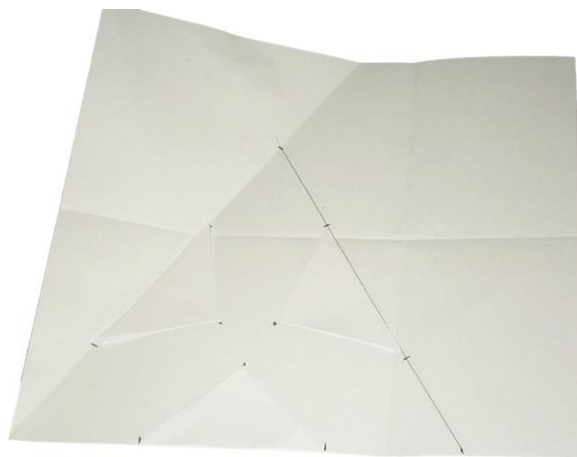
Op 2 Par pliage, extraire de la bande issue de **Op 0** un premier carré. Le découper du reste de la bande. Dans l'opération, une diagonale est apparue. Produire la seconde. Marquer les plis, déplier et découper : on tient 4 demi-carrés de coté 5 cm environ et d'hypoténuse un peu plus de 7 cm.

Op 3 Marquer sur la base du triangle équilatéral (laquelle base se confond avec un bord de la feuille) le premier segment, celui appelé **u** ci-dessus. On profite évidemment du coté du gabarit issu de **Op 2**. Puis

marquer le sommet du demi-carré adossé au coté et encore un segment u. Reprendre la même opération le long du pli fabriqué lors de **Op 1** et marquant un deuxième coté du triangle équilatéral.

Op 4 Tracer maintenant à la règle le troisième coté (en quelque sorte on referme le triangle inachevé en **Op 1**) puis marquer les points comme précédemment. En s'appliquant, on arrive à un tracé relativement précis. Ne reste plus qu'à finaliser le dessin, en tirant les traits voulus, et/ou en coloriant les zones.

* Les exploitations collectives possibles sont nombreuses. L'illustration ci-dessous n'est qu'une indication parmi d'autre (Voir aussi en bas de page 8).



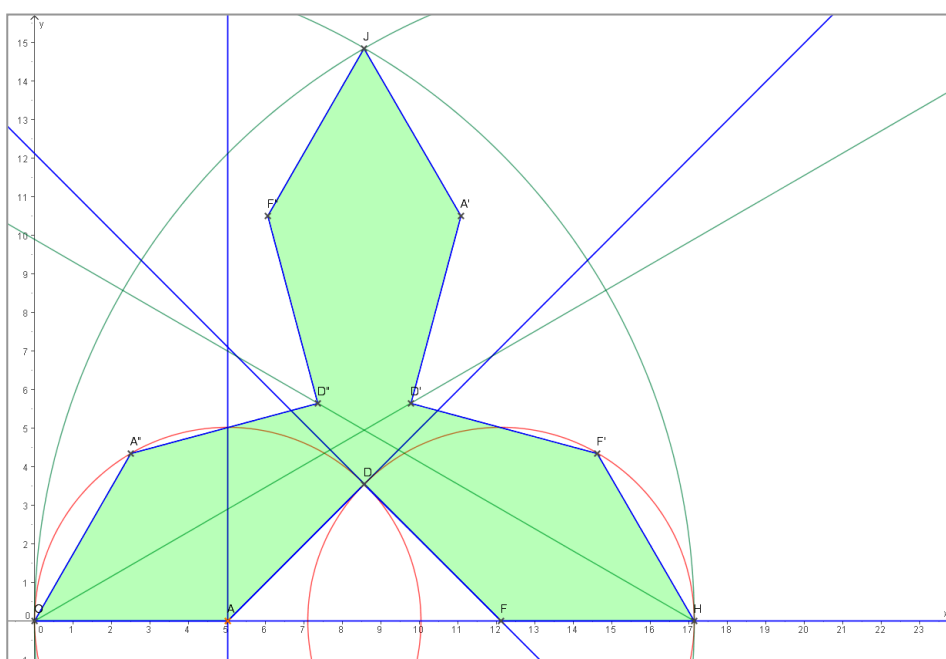
Programme de construction

La genèse rapide d'un programme de construction est sans doute hors d'atteinte de la plus grande part des élèves de CM. Je me contente de proposer deux activités de décodage.

Lecture et application d'un programme de construction.

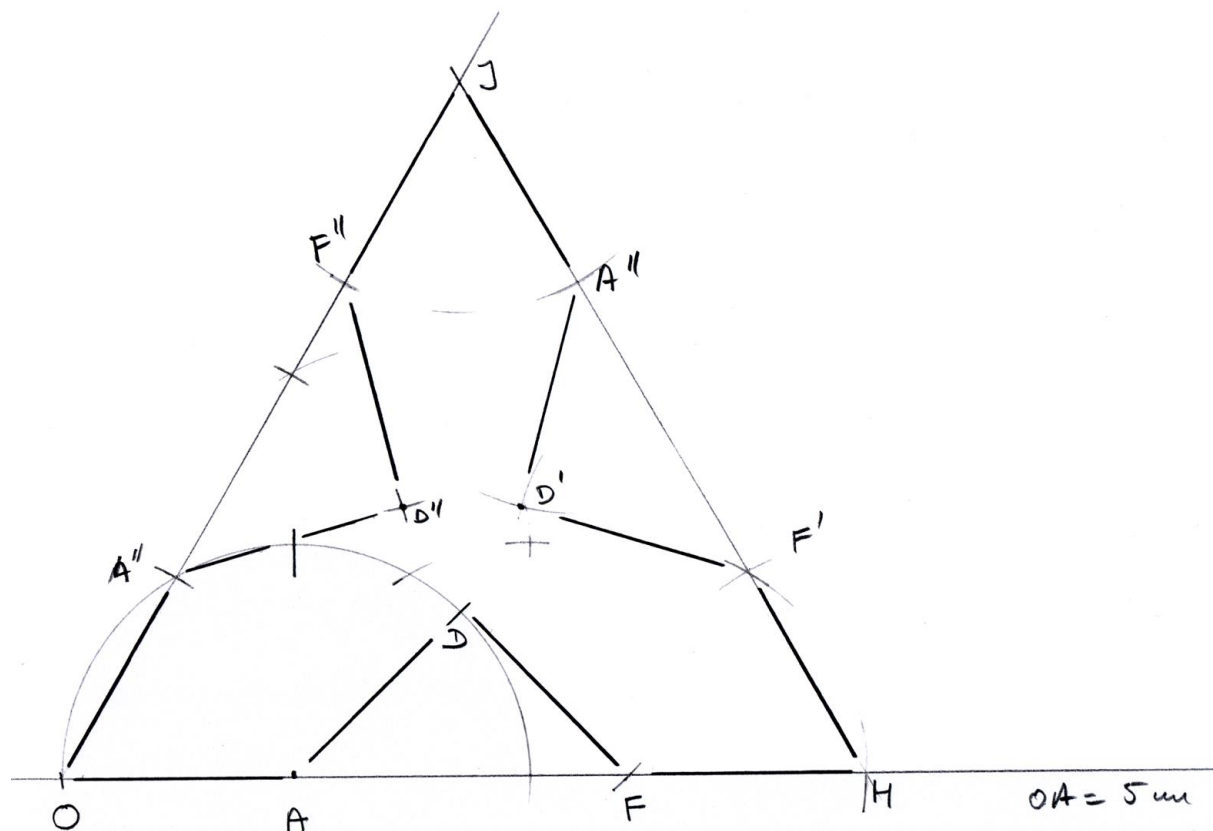
* On trouvera dans le fichier **POS_ProgConstr.pdf** 2 programmes de constructions générés d'après un travail avec le logiciel **GéoNext**. L'illustration ci-contre illustre le fruit du premier programme.

* Dans ce programme, on commence par faire apparaître les points D, F, H (sur la base de la figure); les points O et A sont choisis arbitrairement. On en déduit le point J, sommet du triangle équilatéral de base [OH] puis les bissectrices des angles à la base, qui sont aussi axes de symétrie. On peut alors générer, par symétrie axiale, les points encore manquants.



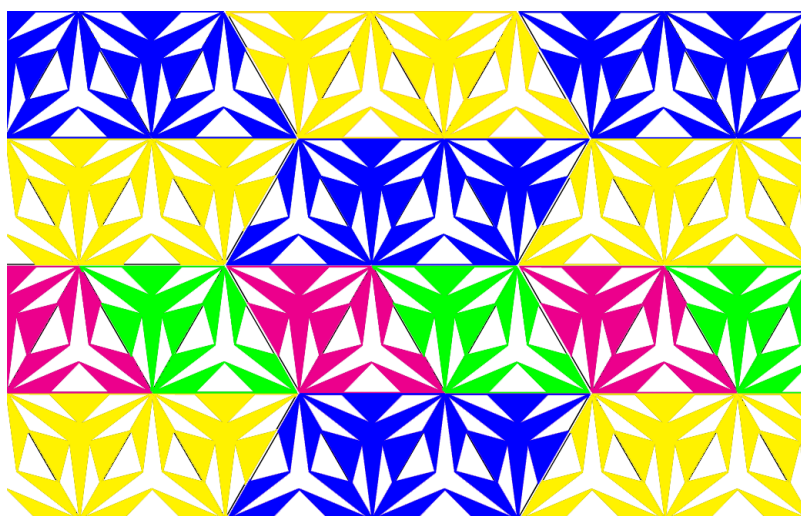
Décodage d'une construction déjà réalisée

* La planche [P. S. O. Construction géométrique] expose un tracé à la règle et au compas. Les segments composants la forme principale n'ont pas été tracés complètement pour laisser bien visibles les traits essentiels de construction. Voici une réduction de cette planche :



* Une mise en œuvre possible est la suivante :

Distribuer une planche par groupe de 2 élèves. Chaque enfant reçoit par ailleurs une feuille blanche au format A4. Faire tracer un trait parallèlement à un grand bord et à 1 cm de celui-ci. Réorienter la feuille pour que ce trait serve de base au tracé à venir. Poser sur ce trait et à 1 cm du bord gauche de la feuille une première marque, nommée O. Puis un point A à 6 cm du point O³. Continuer la construction.



Didier Bertin IUFM Versailles ☒ Antony VdB 2005-2007.

³ Ne pas dépasser 6 cm, sous peine que la construction déborde de la feuille ! Il est impératif de choisir une mesure différente de l'original.