PROGRESSION DE CALCUL MENTAL

Le calcul mental : objectifs et modalités

Le calcul mental vise deux objectifs : d'une part établir des représentations mentales, c'est-à-dire structurer l'ensemble des nombres, d'autre part fournir des procédures de calcul efficaces. Ces procédures sont établies du simple au complexe ; c'est l'automatisation des procédures simples (c'est-à-dire la réduction de leur *coût cognitif*) qui permet de les investir dans des procédures (*stratégies*) plus complexes. La « réduction des coûts » passe par l'entraînement, et permet l'évolution de la « reconstruction » vers le *rappel*. Les « procédures simples » doivent devenir routinières ; ceci passe par la suppression des supports et l'exigence progressive de rapidité.

Calculer mentalement ne signifie pas que l'on renonce complètement aux supports ou à l'écriture. Cela impose seulement de renoncer aux algorithmes de l'écrit (opérations posées). L'établissement de représentations (mentales) des nombres s'appuie en premier lieu sur la fréquentation de supports (frise, spirale, tableau, échelles). C'est l'usage et la familiarité de ces supports qui favorise l'intériorisation de représentations, et l'élaboration de procédures ayant du sens. Ces supports peuvent être affichés au mur, ou bien être disponibles individuellement, *sous certaines conditions* : il doit être admis en effet qu'ils constituent un recours temporaire. Par ailleurs, il est inutile et préjudiciable de surcharger inutilement la mémoire : mieux vaut à cet égard un énoncé écrit plutôt qu'oral, autoriser la notation écrite de résultats intermédiaires.

Les moyens de travailler

Supports : frise, spirale, tableau, échelles (cf. doc annexe)
Ces supports peuvent être collectifs (affichage) ou individuel (mais astreints à certaines restrictions).

Séquence de calcul mental
Les séquences de calcul mental exigent une attention soutenue ; il est préférable qu'elles soient brèves (cinq à dix minutes) et *fréquentes* (si possible quotidiennes). Ceci n'exclut pas que du calcul mental intervienne (toujours brièvement) sous des formes variées et pas seulement dans le cadre des mathématiques. Son intérêt pratique majeur est son utilité pour la vie quotidienne. C'est donc là qu'il faut trouver des occasions de le faire intervenir. Des situations de jeux, stratégiques ou non, utilisant des supports classiques (dés, dominos, cartes…) ou des supports spécifiques mettent en jeu des décompositions numériques ou des calculs simples ; ce sont des occasions de rappel des résultats arithmétiques simples et matière à calculs. Ces situations peuvent intervenir sous forme d'atelier, en groupes restreints, ou bien en fond de classe.
Une séquence de calcul peut être conduite avec la classe entière, ou par demi-groupe. Il est souhaitable qu'une séquence débute par une activité très facile, quasi-rituelle et surtout destinée à focaliser l'attention ; ce peut être : donner le complément à dix, ou bien le double d'un nombre inférieur à 20, ou encore compter de 2 en 2 ou de 5 en 5 à partir d'un départ choisi au hasard, ou encore dénombrer une collection de points sur une carte présentée brièvement.
La consigne est orale, pourvu que la « traduction » ne pose pas problème (nombres inférieurs à 70) ; en petit groupe, la réponse est individuelle, et peut être orale ou écrite ; en plus grand groupe mieux vaut une réponse écrite (papier ou ardoise). Dans ce type de calcul simple la *rapidité* est un objectif visé, car il s'agit de faire maîtriser un répertoire avec sûreté.

Une seconde phase consiste à mettre en œuvre des procédures un peu plus complexes et à les entraîner jusqu'à ce qu'elles deviennent routinières dans les cas où elles sont préférables. Ainsi pour calculer 23+9 ou 44+9 il est commode d'utiliser la suite d'opérateurs +10 –1. C'est là une phase d'apprentissage, élaborée en grand groupe, et conclue par une synthèse à la fin de cette phase. Dans ce cas (et le suivant) il n'est pas souhaitable que la consigne soit orale, parce que cela implique des problèmes de « traduction » numération orale/écrite, qui ajoutent à la charge cognitive ; mieux vaut une consigne écrite en ligne.

Une dernière phase présentera un "problème de calcul", c'est-à-dire une opération pour laquelle il n'existe pas de stratégie clairement privilégiée (ex. 34 + 57). La consigne est évidemment écrite en ligne au tableau. Les réponses sont présentées au tableau. Dans un tel cas, la rapidité d'exécution n'est nullement un objectif, et l'on favorisera au contraire l'explicitation des stratégies des uns et des autres. Ceci dans le but d'en faire découvrir et ultérieurement utiliser de nouvelles. On peut également présenter à ce moment un défi à la classe entière, ou une compétition par équipes avec des règles simples.

Trois remarques s'imposent concernant ce type de séquence.

1. Il n'est pas équivalent de poser la question « *calculer 17 + 23* » et le problème « *Arnaud avait 17 billes et en gagne 23 ; combien en a-t-il maintenant ?* ». Chacun de ces énoncés active une représentation de la tâche à accomplir. Dans le premier cas elle porte sur des nombres "purs", dans le second elle s'appuie sur l'évocation d'un certain champ de réalité. L'expérience montre que le recours a un "habillage" peut stimuler des procédures de résolution qu'un énoncé purement numérique ne susciterait pas.

2. Le calcul mental utilise des représentations mentales des nombres ; ces représentations sont intériorisées à partir de représentations externes (imagées ou verbales). Il se peut que le maintien d'un support visible soit de nature à faciliter la tâche, et permette l'étayage (temporaire) de la représentation interne. C'est ainsi que l'usage des doigts peut être facilitateur, ou bien la présence d'une frise numérique, d'une spirale numérique ou d'une graduation.

3. L'explicitation et la confrontation de stratégies variées sont intéressantes, mais doivent répondre à un dosage prudent. Les meilleures stratégies sont d'abord celles (si elles sont exactes) en lesquelles on a confiance parce que leur « coût » est moindre. Une nouvelle stratégie n'est pas immédiatement économique, et le choix lui-même a un coût. Il est donc préférable de renforcer les stratégies connues (si elles sont exactes), puis d'aborder lentement des stratégies nouvelles, grâce à des opérations où elles sont plus pertinentes, et de les renforcer une à une.

PROGRESSION (cycle 2 et cycle 3)

N.B. : *ci-dessous N désigne un nombre quelconque, D0 une dizaine entière (ex. 50), Dn un nombre terminé par le chiffre n (ex. 57).*

Les opérations additives/soustractives « simples »

Les exercices suivants peuvent être pratiqués avec tout un groupe, les élèves étant interrogés un à un, à la file, dans un ordre défini.

Nombre suivant / précédent	Ex. : « *Quel est le nombre juste après 19 ?* » exercice individuel, à tour de rôle ; pas de support visible

N+2 ; N-2 ; *donné »*	Ex. : « *Compter de 2 en 2 (croissant ou décroissant) à partir d'un nombre*
D0+5, D0-5, D5+5, D5-5	*Ex. : « Compter de 5 en 5 à partir de 15, ou de 30 (croissant ou décroissant) »* support visible éventuel : frise

N+10 ; D0+D0	Ex. : *37 + 10 ?* ou *30 + 40* support visible (collectif) : le tableau

Ce support, et cet exercice ont pour but d'obtenir une procédure rapide d'ajout d'une dizaine *sans surcompter*.

Dizaine plus proche	Ex. : « *Quelle est la dizaine la plus proche de 123 ?* » support (collectif ou individuel) : frise.

Décomposition de 5 ou de 10	*Ex. : Montrer une carte « Quel est le complément à 10 ? »* support : jeu de cartes classique, interrogation individuelle

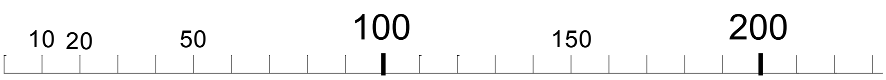
Décomposition de $N \leq 10$ Au lieu de 5+3 = ? « *de 5 pour aller à 8 ?* » *ou* « *de 3 pour aller à 8 ?* » pas de support, ou bien un jeu de cartes : on affiche 2 cartes à la fois.
La pratique du boulier est un bon moyen d'entraîner les décompositions (add. et soustr.) autour de 5 et 10.

Doubles et moitiés Exemple : on pratique une ronde, en partant de 1, 2, ou 3 :
Départ : 2 « *le double ?* » puis « *ajouter 2 ?* », puis « *moitié ?* », puis « *ajouter 2 ?* », puis « *le double ?* » etc. Pas de support visible

Numération
Il n'est question ici que de la numération **écrite chiffrée**. La numération verbale n'est pas négligée pour autant, mais ceci est une autre histoire ; elle comporte des difficultés spécifiques qui en appellent plutôt à la mémoire qu'à la compréhension.

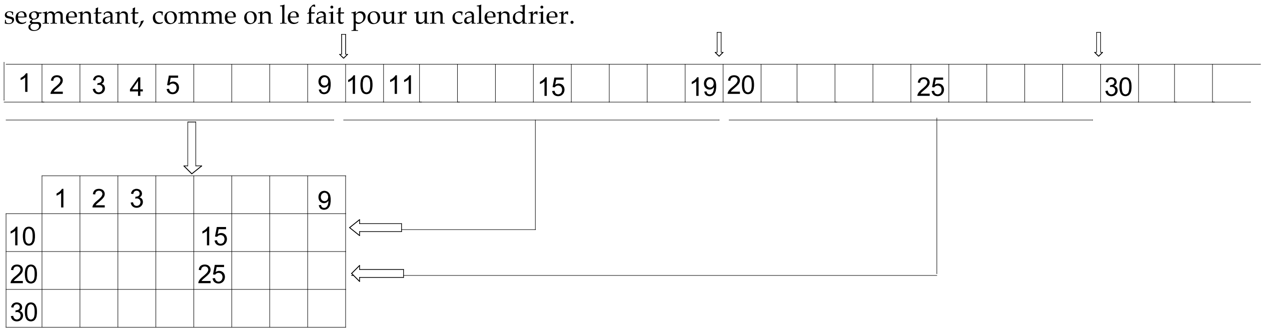
• Un nombre étant écrit en chiffres : reconnaître le *chiffre* des unités, celui des dizaines, celui des centaines ;
On peut utiliser (à titre provisoire) le petit tableau de numération, puis la **frise** ou la **spirale**, sans qu'il soit indispensable de revenir à la définition des groupements ou des échanges.

centaines	dizaines	unités
1	3	7



• Situer un nombre sur une échelle (sur laquelle on indique les « nombres ronds ») : ceci prépare au calcul approché ; donner un nombre entre … et … (p.ex. entre 1237 et 1250).

Une fois consolidé le rôle des rangs dans la numération, on peut passer de la frise au tableau, en segmentant, comme on le fait pour un calendrier.



Propriétés du tableau : même *chiffre des dizaines* dans toute une ***ligne*** ; même *chiffre des unités* dans toute une ***colonne***. On remarque qu'un saut d'une dizaine sur la frise se traduit par un changement de ligne sur le tableau.

Opérations moins simples

N+11 ; N+9 ; N-11 ; N-9 Support d'abord collectif, puis individuel : le tableau
Faire remarquer que +11 = +10+1 donc « *descendre d'une rangée, aller à droite d'une colonne* » ; +9 = +10 -1 « *descendre d'une rangée, aller à gauche d'une colonne* ». Eviter d'abord les franchissements des bords du tableau. Il s'agit de passer à une stratégie plus experte que le surcomptage.

Suites N+7 ; N+12 ou N+13 A partir d'un nombre donné, interroger tous les élèves un à un, en file (les autres contrôlent les résultats) ; on ne cherche pas prioritairement la rapidité ; support visible (collectif ou individuel) : frise ou tableau

En vue des stratégies

Ecart à la dizaine	Ex. : « *Quelle est la* ***distance*** *de 57 à la dizaine plus proche ?* » (rep. 3) Ceci est utile pour certaines stratégies de calcul. Ex. 57+8 = 57+3 +5 = 65 Support : frise ou tableau.

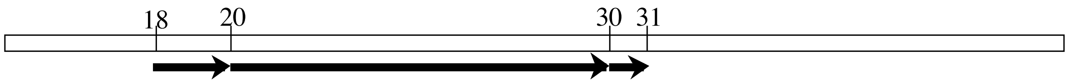
Retenue / pas retenue	Ex. : « *342 + 25 ? retenue ou pas ?* » La réponse est OUI/NON, pas le résultat. Ex. : « 372 – 23 ? *retenue ou pas ?* »

Le but de ce dernier exercice est de faciliter le choix de stratégie.
En effet s'il n'y a pas de retenue, il est possible (et généralement préférable) de calculer « en colonnes » et de gauche à droite, parce que les chiffres seront obtenus dans l'ordre d'écriture : centaines, dizaines, unités. Dans le cas contraire (retenue) cette stratégie est excessivement coûteuse, il vaut mieux recourir aux stratégies de calcul mental. C'est l'objet de ce qui suit.

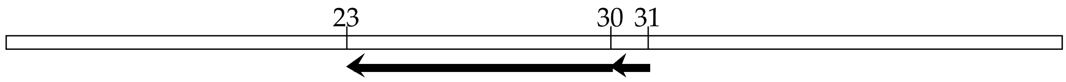
Les stratégies additives/soustractives

Lorsque plusieurs stratégies sont possibles, il n'est pas souhaitable d'en faire découvrir et entraîner plusieurs à la fois ; mieux vaut en faire choisir une, et l'exercer sur des exemples où elle est pertinente.
Plus tard, il convient de passer à une opération où cette stratégie pourrait être moins efficace, reconnaître une autre stratégie utile, puis l'exercer, etc.
Retenons cinq méthodes principales pour la soustraction :

• **Le JALONNEMENT** : «**pour aller de 18 à 31** : 18 à 20, 20 à 30, 30 à 31, donc 2 + 10 + 1 = 13»

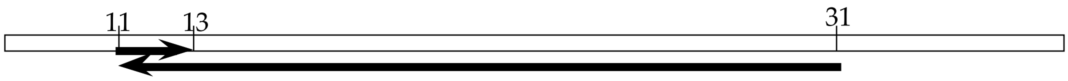


• **La DECOMPOSITION** (ou jalonnement inverse) : « 31 – 8, on fait 31 –1 – 7 »



Ces deux stratégies permettent de s'appuyer sur des « nombres ronds », dont la mémorisation est peu coûteuse. On voit bien que dans certains cas l'une est préférable à l'autre : si les deux nombres sont voisins (Ex. 31 – 27 ?), il vaut mieux « aller de 27 à 31 » ; sinon (Ex. 31 – 8 ?), il est préférable de décomposer.

• **Le PIVOTEMENT** : « 31 – 18 = 31 – 20 + 2 »



Cette stratégie peut paraître plus économique. L'expérience montre qu'elle est extrêmement peu sollicitée par des élèves de CE2, et encore peu par des élèves de CM2. En fait le remplacement d'une opération par deux autres de signe contraire accroît le risque d'erreur. C'est une « stratégie experte », dont il n'est pas souhaitable de hâter la découverte. Elle n'est vraiment judicieuse que lorsque l'un des nombres est proche d'un « nombre rond ». Les déplacements sur le tableau de nombres (page précédente) ont pour but de fournir une représentation simple de cette stratégie

• **Le DECALAGE** : « 31 – 18 c'est ***comme*** 30 – 17 »

Cette stratégie assez rare présente de l'intérêt lorsque l'un des deux nombres est proche d'un « nombre rond ».

• **Le voisinage des DOUBLES** : «25 + 27 c'est **25 + 25** + 2″ donc 50 + 2»

Les stratégies additives sont les quatre dernières.

Calcul multiplicatif

Produit par 10, 100, 1000

Ce sont les produits « simples ».Mais l'on demandera le résultat *d'abord* par écrit ; en effet l'énoncé du résultat nécessite un sectionnement par tranches de trois chiffres, à partir des unités. Pour de tels calculs, il doit être exclu de poser l'opération ou de prendre une calculette.

Tables de multiplication

Tables de 2, puis de 5, puis 4, puis 6, puis les autres. Au-delà de la construction de la table, il est préférable d'éviter la récitation dans l'ordre croissant, afin de ne pas susciter d'interférences en mémoire.
La mémorisation de ce répertoire est si importante que tous les supports et jeux variés (dominos, tables incomplètes, jeux de cartes…) sont souhaités. Toutes les observations et exploitations de la table de Pythagore sont bienvenues : coloriage des multiples de 2, de 5, de 3…, effacement des cases les mieux connues, puzzles, tables incomplètes…

Décomposition

Les stratégies élémentaires de calcul sont peu nombreuses. On procède généralement par décomposition.
Ex. $123 \times 12 = 120 \times 12 + 3 \times 12 = 1440 + 36 = 1476$. Les résultats partiels n'étant pas toujours simples, on doit autoriser l'écriture des résultats partiels (ici, 1440 et 36).
Toutefois, il faut observer que d'autres formes de décomposition fournissent des moyens de calcul intéressants. Ce sont les décompositions multiplicatives. Il est étonnant de constater qu'à l'école élémentaire, les décompositions additives sont ordinairement bien utilisées, et les décompositions multiplicatives le sont très peu. Soit à calculer 175 _ 24. Un moyen très simple consiste à remarquer la décomposition suivante, puis à regrouper :

$$(25 \times 7) \times (6 \times 4) = (7 \times 6) \times (25 \times 4) = 4200$$

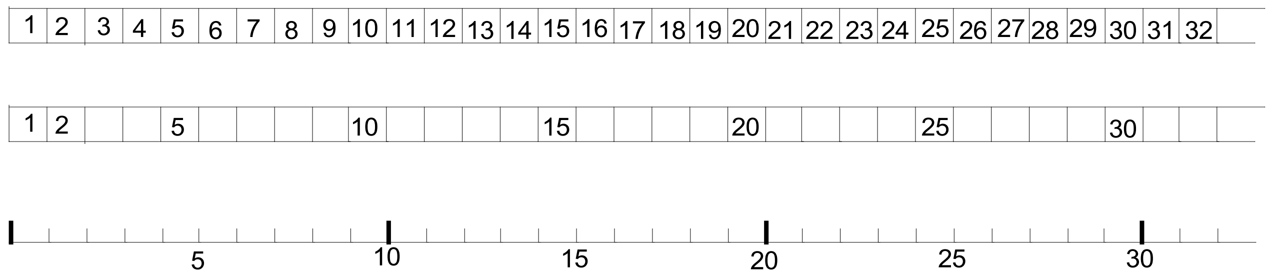
C'est pourquoi il est utile de repérer systématiquement les décompositions multiplicatives, sans se limiter aux produits de deux facteurs (table de Pythagore), ni aux facteurs inférieurs à dix. Pour un tel calcul, l'écriture des résultats partiels est évidemment autorisée. Un entraînement utile consiste à interroger les tables *en décomposition* : « *comment peut-on décomposer le nombre 48 ?* » (rep. : 6×8 , 4×12, 2×24).

Division exacte et approchée

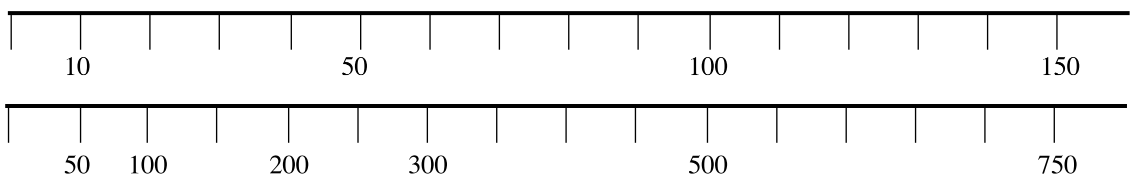
Dans le champ du calcul mental, la division est considérée comme opération inverse de la multiplication (division exacte), et c'est surtout le calcul approché qui est visé, soit en recherche de résultat, soit en tâche de jugement :
Exemple 1 : « *calculer 3200 : 25* »
Dans ce cas, une procédure économique consiste à calculer $3200 : 100 \times 4 = 32 \times 2 \times 2 = 128$
Exemple 2 : « *Le résultat de 6052 : 17 est-il 36 , 98 , 356 ?* »

Ordre de grandeur, approximation

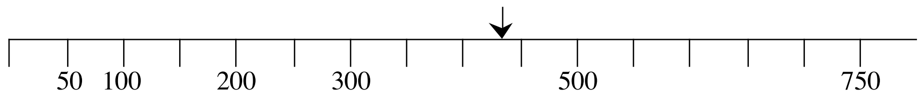
Comme on l'a indiqué au début de ce texte, le calcul approché est à la fois d'utilité scolaire et sociale.
Il est généralement plus utile de connaître rapidement une valeur approchée du résultat que d'obtenir une valeur exacte ; c'est encore plus évident lorsqu'il s'agit de nombres décimaux.
Mais la notion de valeur approchée suppose une bonne intériorisation des rythmes de la droite numérique. Les frises numériques évoquées plus haut mentionnent tous les nombres, sinon par leur écriture chiffrée, au moins par une case ou un trait (dans le cas des graduations). Une première approche consiste à alléger la frise et passer à la graduation :



Une première activité consiste à repérer la place d'un nombre, ainsi que le « nombre rond » (ici, dizaine entière) le plus proche.
Pour accéder à de nouveaux ordres de grandeur, on utilise des graduations abrégées, régulières ou non.



Situer un nombre sur une échelle / proposer un nombre correspondant à un point donné de l'échelle.
Exemple :



Le nombre indiqué par une flèche est situé entre 400 et 450, plus près de 450 ; on peut proposer 430.

Arrondir, c'est trouver un nombre "rond" proche (dizaine ou centaine entière).
Dans ce qui suit le signe « ~ » signifie « proche de ».

Exemple : calcul approché de **123 + 732 ?** 123~ 120 ; 732 ~ 730 → 120+730 = 850 résultat approché

Compensation : on réduit l'erreur en arrondissant l'un par valeur inférieure, l'autre par valeur supérieure. Exemple **1542 + 728 ?** 1542 ~ 1540 ; 728 ~ 730 → 1540+730= 2270 résultat approché,
ou même : 1542 ~ 1500 ; 728 ~ 750 → 1500+750 = 2250 résultat approché.

Registre multiplicatif

C'est dans le calcul multiplicatif que le calcul approché a la plus grande importance. C'est là aussi qu'il offre les meilleures occasions de discussion, selon que l'on privilégie la rapidité ou la précision. Si l'on recherche seulement l'ordre de grandeur, pour le calcul de 123 × 12, on peut s'en tenir à :

123 ~ 100 12 ~ 10 donc 123 × 12 ~ 1000

Mais si l'on recherche une meilleure approximation, on peut adopter 120 _ 12 = 1440, le carré de 12 étant un résultat classique du répertoire. Une recherche de précision conduit à examiner les compensations : si l'on *minore* un facteur, il convient de *majorer* l'autre, dans des proportions analogues. Ainsi 123 100 (réduction ~20%) 15 12 (augmentation ~ 20%) 100 × 15 = 1500 (le résultat exact est 1476)

L'exercice peut se présenter sous forme de **jugement** et non de calcul :
Parmi les nombres suivants, quel est le plus proche de 725 × 37 ? 2680 , 27 000 , 16 000 , 200 000

Séquences écrites

Exemples : **SUITES** « d'une case à la suivante, l'intervalle est toujours le même :

4		10		16			

	10					40	

voir planche en annexe.

OPERATEURS

+19 ➤

		61					156

voir planche en annexe.

COMPTE EST BON

Combiner les quatre nombres 2, 3, 7, 20 (utilisés une fois et une seule) avec des signes opératoires pour obtenir : 0, 1, 2, 3, 11, 20, 100, 207, 840…

Jeux de calcul. Ces jeux fonctionnent plutôt en « fond de classe », ou bien lors d'une activité par atelier. A moins qu'il ne puisse concerner toute la classe, individuellement ou par équipe, comme « Le compte est bon ». Autres exemples en annexe.

Utilisation de la calculette

Un usage bien compris de la calculette n'exclut par le calcul mental, bien au contraire. Ce dernier intervient, soit pour les calculs les plus simples, soit pour vérifier la vraisemblance d'un résultat obtenu à la machine.

Voici un exemple d'activité pour petit groupe. Un élève dispose d'une calculette et frappe une à une les quatre premières touches indiquées. Tous contrôlent le résultat à l'affichage. Il s'agit de prévoir la suite des affichages. Une fois les propositions écrites, on vérifie.

Touche appuyée	8	+	7	=	=	=	=	=
Affichage	8	8	7	15	?	?	?	?

Touche appuyée	8	x	7	=	=	=	=	=
Affichage	8	8	7	24	?	?	?	?

Touche appuyée	8	x	=	+	=	x	=	+
Affichage	8	8	64	?	?	?	?	?

❖❖❖❖