# ARITHMÉTIQUE ET LOGO (VERSION ABRÉGÉE)

Cet article existe sous deux versions.

La version intégrale contient l'ensemble des 9 chapitres. Cette version comprend 34 pages. Le fichier associé (au format pdf) pèse environ 870 Ko.

La version en feuilletons comprend autant de fichiers que de chapitres. Cette version en feuilletons a été conçue pour un accès plus facile depuis un site Web.

Vous lisez présentement la version en feuilletons.

## 3 NOMBRES PREMIERS

La maîtrise du concept de multiplication, passe par des exercices divers, sur les tables notamment, d'où toute une batterie mettant en jeu la notion de nombres premiers, sans que celle-ci soit complètement révélée aux élèves de cycle 3. En particulier, à ce niveau de scolarité, est déclaré premier un nombre qui n'est pas dans la table de Pythagore. La connaissance de ces nombres (que les élèves ne sont pas censés nommer comme premiers) est donc symétrique de la connaissance de tous ceux qui font partie de cette fameuse table.

Les procédures concernées par ce thème sont regroupées dans le fichier **`DivMult.lgo`**. On en trouvera le listage dans le fichier **`Code Xlogo_MulDiv.pdf`**. Pour travailler confortablement, je vous conseille d'éliminer la zone graphique destinée à la tortue en tapant la commande **`fsep 0`**.

• Un premier outil permet de savoir si un nombre est premier:

```
EC PREMIER? 45
FAUX
EC PREMIER? 451
FAUX
EC PREMIER? 4513
VRAI
```

• Vous pouvez évidemment picorer. Si vous êtes (relativement) patient(e), essayez par exemple la commande **`ec premier? 1234567891`** !

↗ Mais il est sans doute préférable d'organiser sa recherche par les seuls nombres de la forme $6k \pm 1$. Un travail d'explicitation est intéressant (au collège ?) du fait de la notion mathématique qu'elle met en jeu. Tout nombre entier p peut se laisser écrire sous la forme $p=6\times q+r$ avec $0 \leq r \leq 5$. Si r est nul, p est divisible par 6; si r vaut 2 ou 4, p est pair; si r vaut 3, p est divisible par 3. Donc seuls les cas r=1 ($6\times q+1$) et r=5 ($6\times q+5$) ne sont pas réglés. En remarquant que $6\times q+5$ s'écrit aussi bien $6\times (q+1)-1$, on est donc bien amené à traiter les seuls entiers de la forme $6\times q\pm 1$ comme annoncé : ce sont les seuls *candidats* à être des nombres premiers, en plus de 2 et 3.

• Au CM, on ne peut pas raisonner de la sorte : la pensée algébrique n'est pas encore mise en place et le concept de la division euclidienne reste fragile. Le plus simple consiste donc à proposer un tableau de 6 colonnes puis à faire cercler les constituants qui sont reconnus premiers. Dans l'exemple ci-contre, les cercles attendus ne pourront apparaître que dans les cases des colonnes (a) et (c).

| a | b | c | d | e | f |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 |
| 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 |
| 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 |
| 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 |

Voici une application pédagogique du module plus assurée pour le Cours Moyen ; le module agit comme une boite noire : on fait tirer au sort un nombre à l'ordinateur, par exemple entre 10 et 1000, on demande à la classe de deviner si ce nombre est premier [1] puis on vérifie avec l'ordinateur :

```
EC 10 + HASARD 90
47
EC PREMIER? 47
VRAI
```

Ce faisant, bien difficile de ne pas convoquer les fameux critères de divisibilité…

Le chantier « recherche des nombres premiers » offre quelques belles pistes, à condition de ne pas travailler sur des entiers vraiment trop grands [2]. Amusez-vous à tester le module sur la suite 1, 19, 197, 1979, 19793, 197933, 1979339, 19793393 qui ne comprend que des nombres premiers. Observez que XLogo ralentit sur le suivant : 197933933, et que vous avez le temps de faire un café avec le suivant du suivant : 1979339339 tout aussi premier.

• Ceci nous amène au petit jeu : saurez-vous continuer la série 1, 17, 173 pour n'engendrer à chaque fois que des nombres premiers. Profitez-en pour ausculter votre recherche : vous n'ajoutez pas de chiffre pair à la queue d'un nombre de la série, ni de 5 … mais pourrez-vous aller très loin ?

• Bien entendu, ces recherches resteront limitées à l'école primaire. Mais rien ne les interdit au cycle 3, sous forme de problème ouvert, disons dans une perspective socioconstructiviste.

Voici maintenant une procédure très utile pour obtenir la suite des nombres premiers jusqu'à un certain rang : **SUITEPREMIERS** . La première idée d'un tel travail est une meilleure perception des nombres entiers: il n'y a pas de borne pour les nombres premiers et ceux-ci sont *à peu près* répartis également partout. Le *à peu près* ne peut être plus précis ici, si on a le courage de tirer la suite assez loin, on découvrira des trous étranges … Voici un exemple de session :

```
EC SUITEPREMIERS 111
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89
97 101 103 107 109
```

On pourra faire mettre en œuvre le classique crible d'Ératosthène, puis vérifier avec l'ordinateur. Mais il est sans doute plus intéressant d'investiguer dans la liste obtenue : il existe quatre nombres premiers entre 109 et 200, mais aucun entre 200 et 210; un seul entre 210 et 220, mais trois entre 220 et 230… Et plus loin?

• Intervient ici une troisième procédure : **LPREMIERS**. Plus lente, elle permet de se focaliser sur des intervalles plus serrés mais plus lointains.

```
EC LPREMIERS 100 300
101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157 163 167 173 179 181
191 193 197 199 211 223 227 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277
281 283 293
```

Étudiez les intervalles [1330 1360] et [1870 1880] etc. Une autre piste consiste à étudier les nombres premiers jumeaux, c'est-à-dire distants de 2 unités (3 & 5, 5 & 7, 11 & 13, 17 & 19, etc.): répartition par dizaines, par centaines…Ici on peut glisser vers la notion d'histogramme, se livrer à des calculs de moyennes, de fréquences, essayer de préciser la notion de probabilité (sous-entendu qu'un nombre tiré au hasard soit premier). L'écart entre deux nombres premiers consécutifs est très variable, même loin: 1301 et 1303, 1997 et 1999, 1327 et 1361 sont des nombres premiers consécutifs. Pire: les trous creusés dans N en ôtant les nombres non premiers sont aussi larges que l'on veut! Recette: choisir un entier n et

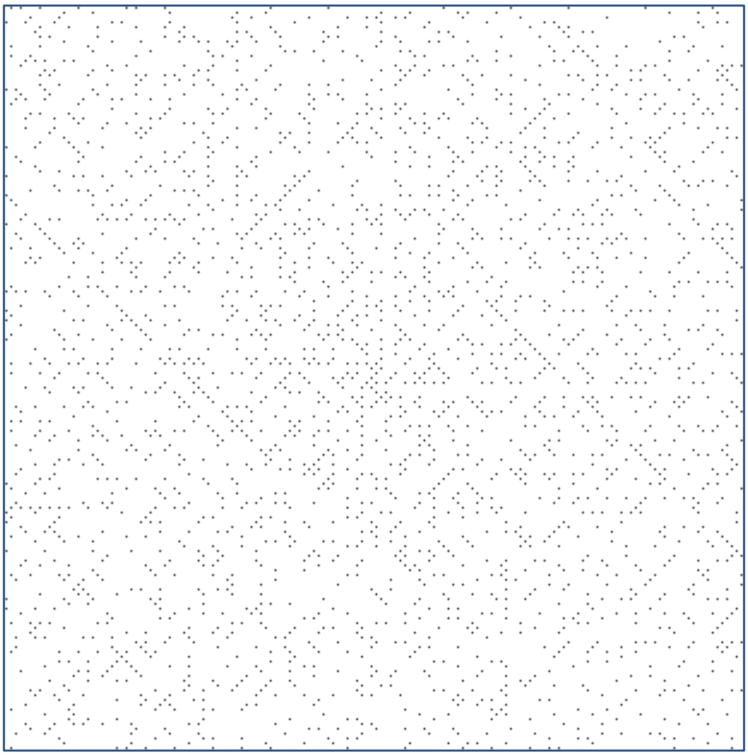
---

[1] Entendre « n'est pas dans la table de Pythagore ».

[2] Sauf réglage spécifique, les entiers ne peuvent excéder 999 999 999. Ce n'est déjà pas si mal !

étudier la primarité de n!+2, n!+3, n!+4, …, n!+n. Bien entendu, ces recherches ne trouveront leur place qu'au lycée, certainement pas à l'école primaire.

Ainsi, les nombres premiers sont *à peu de choses près* distribués au hasard *à peu près partout*… S. M. Ulam a eu l'idée de distribuer les entiers sur une spirale carrée et de marquer ceux d'entre-eux qui étaient premiers. Son travail est paru en 1973 dans le Scientific American. La procédure `ULAM` permet de réitérer son expérience.



• Lancez la commande `ULAM 500` pour voir apparaître progressivement des petits points noirs (sur fond blanc) signalant la présence de nombres premiers. Pour que la visualisation soit pertinente, vous devrez retrouver une zone graphique conséquente. A cet effet, tapez la commande `fsep 0,6` puis agrandissez la zone réservée à la tortue Logo, en tirant manuellement avec votre souris sur la séparation horizontale.

Vous aurez trouvé en page précédente une copie d'écran d'un tel travail. On repère des obliques mais aussi des trous. Impossible d'expliquer le pourquoi…

Note aux bricoleurs : Dans le texte de la procédure **`ULAM`** on lit `soit "taillec tc ftc 2` ; la commande `ftc` permet de fixer la taille du crayon en pixels. On a choisi une taille de 2, mais rien ne vous empêche d'opter pour une taille plus élevée.

• Il va sans dire que ce travail graphique n'a pas de sens dans les premiers degrés de la scolarité.

Liés à la notion de nombre premier, on trouve celle de décomposition en facteurs premiers, et celle de diviseurs. On aborde ces points dans le chapitren°4.